MANUALE DI OTTICA

per la classe prima (professionale)

a cura dei docenti

dell'IIS G.Galilei - Milano

Agosto 2010

1. La luce

Siamo abituati a vivere come "immersi" in un mondo di luce, nel quale la percezione degli oggetti che ci circondano, delle loro dimensioni e della loro distanza è dovuta alla luce che essi ci inviano e che raggiunge i nostri occhi.

In un ambiente completamente buio perdiamo la capacità di muoverci e di orientarci.

Se però consideriamo con più attenzione i corpi luminosi che ci circondano, ci rendiamo conto che solo alcuni di essi emettono luce "propria" e sono **sorgenti di luce** o **corpi luminosi**. Molti altri corpi semplicemente riflettono o diffondono la luce emessa da qualche sorgente di luce, e appaiono come **corpi illuminati** solo quando sono raggiunti dalla luce emessa da qualche corpo luminoso: gli oggetti presenti in una stanza buia diventano visibili solo quando viene accesa una lampadina e sono raggiunti dalla luce da essa emessa.



Figura 1*. Alcuni corpi, come il filamento incandescente della lampadina, sono sorgenti di luce che emettono luce "propria". Altri corpi, come il libro e la superficie del tavolo, riflettono o diffondono la luce emessa da qualche altro corpo, e sono visibili solo quando vengono raggiunti dalla luce emessa da una sorgente di luce.*

Le sorgenti di luce

Esistono diversi tipi di sorgenti luminose.

Tutti i corpi con temperature superiori a circa 600 °C sono sorgenti di luce.

La luce emessa da questi corpi ci appare di diverso colore a seconda della loro temperatura:

- un pezzo di metallo posto su una fiamma e scaldato a circa 600 °C diventa incandescente ed emette luce di colore rosso scuro;

- se la temperatura raggiunge i 1.000 °C, come per esempio negli avvolgimenti che si trovano all'interno delle stufette elettriche o nei tostapane, viene emessa luce di colore arancione;
- il filamento di tungsteno di una lampadina, riscaldato dal passaggio della corrente elettrica a una temperatura di circa 3.000 °C, emette un'intensa luce di colore bianco-giallastro;
- la luce del Sole, la cui temperatura superficiale è di circa 6.000 °C, appare bianca;
- la luce emessa dalle stelle più calde, la cui temperatura superficiale può raggiungere i 20.000 °C, appare azzurra.





***Figura 2**. La resistenza della stufetta elettrica è riscaldata a circa 1000 °C ed emette luce rossa. La lampadina emette luce bianco-gialla perché il filamento di tungsteno è riscaldato dal passaggio della corrente elettrica a una temperatura di circa 3000 °C.*

Vi sono anche sorgenti di luce a bassa temperatura.

Tutti i gas, quando vengono eccitati in maniera opportuna, emettono luce: questo avviene per esempio quando vengono percorsi da una corrente elettrica, come nei tubi al neon o nelle lampade al sodio utilizzate per l'illuminazione stradale. In questo caso il colore della luce emessa dipende dalla natura del gas: i vapori di sodio delle lampade per l'illuminazione stradale emettono luce di colore giallo-arancio, mentre i vapori di mercurio contenuti nelle lampade UV emettono luce di colore viola. Le insegne luminose dei negozi e delle scritte pubblicitarie sono realizzate con tubi di vetro contenenti miscele di gas scelte in modo da emettere luce di colore determinato.

Alcune sostanze solide, infine, sono in grado di emettere luce quando sono opportunamente eccitate. Gli schermi dei televisori o dei computer, per esempio, hanno la superficie interna ricoperta da una sostanza

fluorescente che emette luce quando viene raggiunta dagli elettroni emessi da un elettrodo e accelerati da un campo elettrico. Si distinguono le sostanze **fluorescenti**, che emettono luce solo mentre sono eccitate, e le sostanze **fosforescenti**, nelle quali l'emissione di luce perdura per un certo tempo anche quando è venuta meno l'eccitazione, come nei quadranti degli orologi che, dopo essere stati esposti a una forte sorgente di luce, appaiono luminosi per parecchio tempo anche al buio.



***Figura 3**. Nelle lampade fluorescenti come quelle delle insegne luminose la luce è emessa da gas a bassa pressione eccitati dal passaggio della corrente elettrica.*

Corpi opachi e corpi trasparenti

La maggior parte dei corpi ostacola la propagazione della luce:

- si dicono **corpi opachi** quei corpi che non lasciano passare la luce;
- si dicono **corpi trasparenti** quei corpi che, come l'aria, l'acqua o il vetro, non ostacolano il passaggio della luce.

La classificazione dei corpi in corpi opachi e corpi trasparenti è relativa: l'opacità di un corpo dipende, oltre che dalla sostanza di cui è composto, anche dal suo spessore. Parte della luce che raggiunge la superficie di un materiale si propaga all'interno di esso. Nella maggior parte dei casi tutta la luce, dopo aver percorso un breve tratto, è trasformata in qualche altra forma di energia, come calore o energia chimica, e si dice che la luce è stata assorbita. I materiali attraverso i quali la luce non può passare sono detti **opachi**. L'ammontare dell'assorbimento dipende dalle proprietà del materiale e dal suo spessore. Uno strato sottilissimo di metallo, come una sottilissima lamina d'oro, può essere trasparente, mentre uno strato di acqua di grande spessore è completamente opaco, tanto che ad alcune centinaia di metri di profondità sotto la superficie del mare vi è un'oscurità totale.

Alcuni materiali assorbono pochissima luce e quasi tutta la luce è trasmessa. Questi materiali sono **trasparenti** e sono molto importanti per l'ottica. Se la superficie di tali materiali trasparenti è lucidata, la luce li attraversa come un fascio ben definito. Nessun materiale è perfettamente trasparente e un poco di luce è sempre assorbita. I vetri di buona qualità assorbono circa lo 0,5% della luce incidente quando essa attraversa uno spessore di 10 mm. Per la produzione di fibre ottiche sono stati sviluppati vetri speciali che assorbono meno del 10% della luce incidente su lunghezze di più di un chilometro.

Esistono anche **corpi traslucidi**, come il vetro opalizzato, la carta sottile, il fumo o la nebbia, che lasciano passare parte della luce da cui vengono raggiunti ma la disperdono in varie direzioni. Questi materiali contengono piccole particelle con proprietà ottiche differenti da quelle del mezzo circostante e trasmettono la luce diffondendola allo stesso tempo, in modo che non è possibile vedere chiaramente attraverso di essi. Anche se le singole particelle che li compongono sono trasparenti, le ripetute riflessioni attraverso la massa di particelle diffonde la luce. Lo stesso effetto si ottiene con un materiale trasparente che ha una superficie non lucidata, come il vetro smerigliato. Schermi fatti di materiale traslucido sono spesso usati per diffondere la luce da una sorgente, o come superfici sulle quali vedere immagini.

Quando un corpo la cui superficie è particolarmente liscia (una lastra di vetro, o una superficie metallica) viene raggiunto dalla luce emessa da una sorgente luminosa, ne rinvia una parte in una direzione ben determinata che dipende dalla direzione di provenienza della luce. Si ha allora il fenomeno della **riflessione** della luce. Se però la superficie del corpo non è sufficientemente liscia, come avviene nella maggior parte dei casi, parte della luce incidente viene sparpagliata in tutte le direzioni. È grazie a questo fenomeno, che si dice **diffusione** della luce, che possiamo vedere gli oggetti che ci circondano, quando sono illuminati dalla luce emessa da una sorgente luminosa.

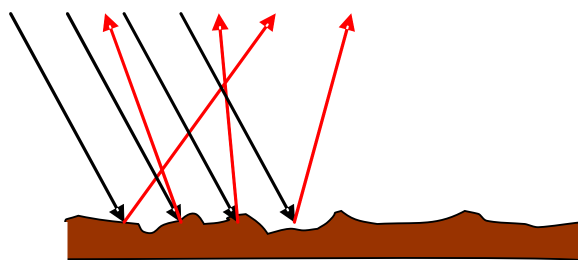


Figura 4. *La riflessione dei raggi luminosi su una superficie scabra dà luogo al fenomeno della diffusione: i raggi luminosi riflessi vengono sparpagliati in tutte le direzioni.*

2. La composizione dei colori

Che cosa determina la varietà di colori con cui ci appaiono le differenti sorgenti luminose?

Possiamo renderci conto molto facilmente che **la luce che ci appare bianca è costituita dalla sovrapposizione di luce di diversi colori**.

Osserviamo innanzitutto che dalla composizione di luce di diversi colori possiamo ottenere luce bianca. Se esaminiamo con una lente di ingrandimento lo schermo di un computer o di un televisore acceso, in una zona che appare bianca, vedremo immediatamente che la superficie dello schermo è costituita da tanti puntini di colore rosso, verde e blu che visti da lontano si confondono tra loro dando luogo a una superficie che appare bianca.



Figura 5*. Ingrandimento di uno schermo di computer: i vari colori, compreso il bianco, si ottengono combinando la luce emessa da punti di colore rosso, verde e blu.*

La luce bianca, poi, può essere scomposta ottenendo nei diversi colori che la compongono. Se facciamo incidere con un’opportuna inclinazione un fascio di luce bianca su una faccia di un prisma triangolare di vetro, vediamo emergere dalla faccia opposta luce di differenti colori, che risultano deviati in misura diversa: si ha una minore deviazione per la luce rossa e una deviazione maggiore per la luce di altri colori: arancione, giallo, verde, azzurro e viola. La stessa scomposizione della luce solare si ha nel fenomeno dell’arcobaleno, per effetto delle gocce d’acqua sospese nell’atmosfera che agiscono come piccoli prismi.

Fu Newton, nel corso dei suoi studi sulla composizione della luce, che a partire dal 1666 utilizzò il termine **spettro** per indicare la distribuzione di colori che si ottiene dalla scomposizione della luce bianca.

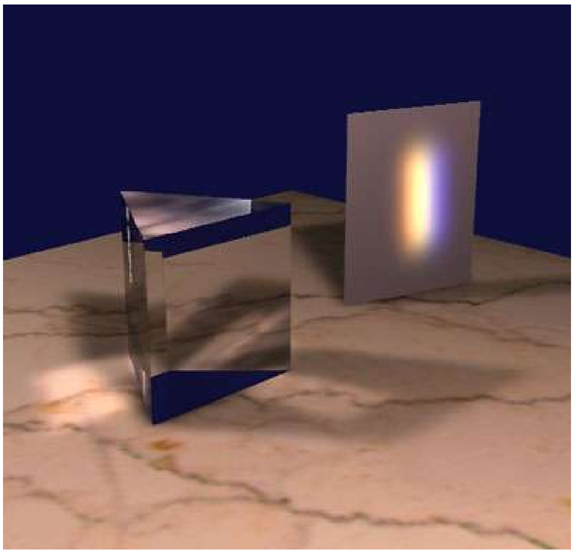


Figura 6*. la luce bianca che passa attraverso un prisma di vetro viene scomposta nei colori che la compongono: rosso, arancio, giallo, verde, azzurro e viola.*



Figura 7*. Nell'arcobaleno la luce solare bianca viene scomposta nei vari colori spettrali passando attraverso le goccioline d'acqua sospese nell'aria.*

La luce emessa da sorgenti incandescenti produce sempre, passando attraverso il prisma, uno spettro luminoso composto da una distribuzione continua di colori.

Nello spettro emesso da una sorgente incandescente la luce rossa prevale sugli altri colori tanto più quanto è minore la temperatura della sorgente. Si spiega così la gamma di colori della luce emessa dalle sorgenti incandescenti, che passano, aumentando la temperatura, dal rosso al giallo fino al bianco.

Anche la luce colorata emessa dalle lampade a gas può essere analizzata attraverso un prisma, ma in questo caso, anziché ottenere una distribuzione continua di colori, si ottiene uno spettro luminoso costituito da poche righe di colori ben determinati, come è mostrato nella figura 8.

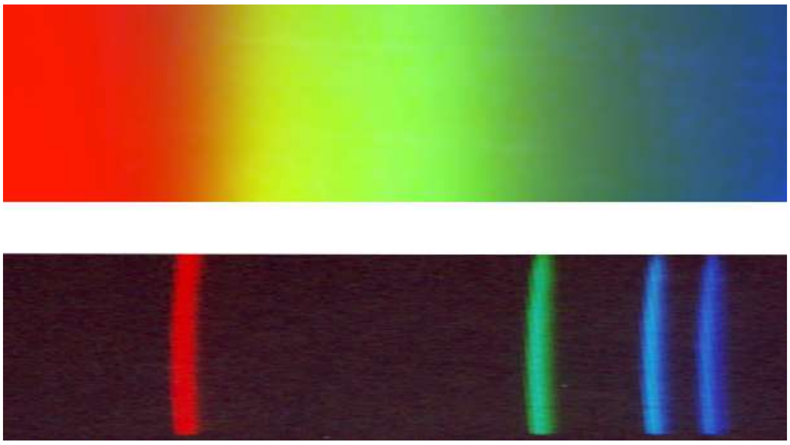


Figura 8*. Lo spettro continuo della luce solare (in alto) e lo spettro a righe della luce emessa da una lampada a vapori di cadmio (in basso).*

La luce bianca è quindi una miscela di **colori spettrali**, ossia di tinte che si possono ricavare scomponendola e ottenendone quindi uno spettro. Tra queste sono stati scelti tre **colori fondamentali**, ossia il **rosso**, il **verde** e il **blu**, dalla cui composizione si possono ottenere tutte le altre tonalità cromatiche. Sovrapponendo coppie di luci di due colori fondamentali si ottengono i **colori complementari** al terzo colore fondamentale, come mostra la figura 9:

- dalla sovrapposizione di una luce rossa e di una luce verde si ottiene il **giallo**, che è il colore complementare al blu;
- dalla sovrapposizione di una luce verde e di una luce blu si ottiene il **ciano**, un colore azzurro-verdastro che è complementare del rosso;
- dalla sovrapposizione di una luce blu e di una luce rossa si ottiene invece il **magenta**, un colore rosso-viola che è complementare del verde.

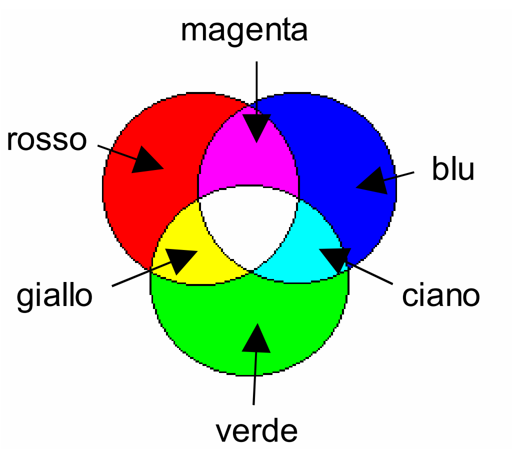


Figura 9*. I tre colori fondamentali rosso, verde e blu, e i colori complementari ciano, magenta e giallo che si ottengono dalla loro composizione.*

- Dalla composizione di luci dei tre colori fondamentali (o di un colore fondamentale e del suo complementare) si ottiene infine luce bianca.

Una sorgente luminosa che emette luce di un colore spettrale puro e che analizzata attraverso un prisma dà origine a uno spettro composto da luce di un solo colore, si dice **monocromatica**.

Il colore dei corpi

Nella diffusione della luce da parte dei differenti corpi opachi i vari colori spettrali vengono assorbiti o diffusi in diversa misura. È questo che determina il diverso colore dei corpi:

- un corpo appare bianco quando diffonde tutti i colori che compongono la luce da cui viene illuminato (figura 10);

- un corpo appare nero se assorbe tutti i colori, senza diffonderne nessuno;

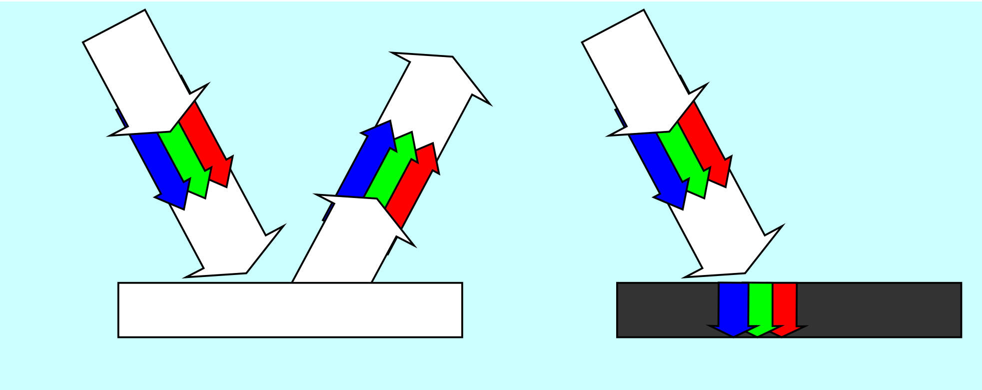


Figura 10*. Un corpo illuminato da luce bianca appare bianco (a sinistra) se diffonde tutti i colori, senza assorbirne nessuno. Appare nero (a destra) se assorbe tutti i colori, senza diffonderne nessuno.*

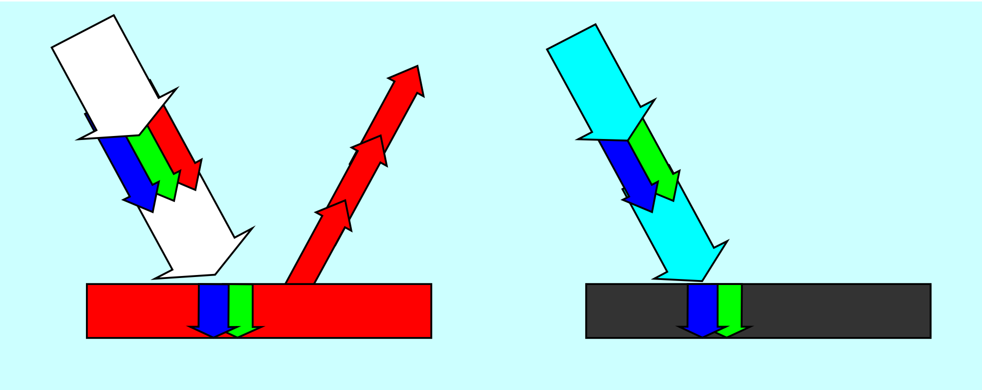


Figura 11*. Un corpo illuminato da luce bianca appare rosso (a sinistra) se diffonde solo la componente rossa della luce incidente, assorbendo le componenti blu e verde. Lo stesso corpo appare nero (a destra) se viene illuminato da luce che non contiene una componente rossa.*

- un corpo appare rosso quando viene illuminata da una luce bianca se la sua superficie assorbe tutti i colori tranne il rosso, che viene diffuso (figura 11);
- lo stesso corpo illuminato con una luce di colore blu o verde, cioè con una luce che non contiene una componente rossa, esso appare nero, perché tutta la luce che raggiunge la sua superficie viene assorbita;
- lo stesso avviene per gli altri colori: un corpo appare per esempio verde quando viene illuminata da una luce bianca se la sua superficie assorbe tutti i colori tranne il verde, che viene diffuso; se questo corpo viene illuminato con luce rossa o blu, cioè con una luce che non contiene una componente verde, appare nero, perché tutta la luce che raggiunge la sua superficie viene assorbita.

Ai tre colori fondamentali rosso, verde e blu corrispondono i tre **pigmenti fondamentali** ciano, magenta e giallo, utilizzati nella tecnica tipografica e nella produzione delle sostanze coloranti (in generale si indicano con il nome di **pigmenti** tutte le sostanze, naturali o artificiali, che impartiscono una colorazione alle sostanze a cui sono sovrapposte o nelle quali sono disciolte.): dalla combinazione di coppie di pigmenti fondamentali si ottengono tinte corrispondenti ai tre colori fondamentali, mentre dalla combinazione in parti uguali di tutti e tre i pigmenti fondamentali si ottiene il nero.

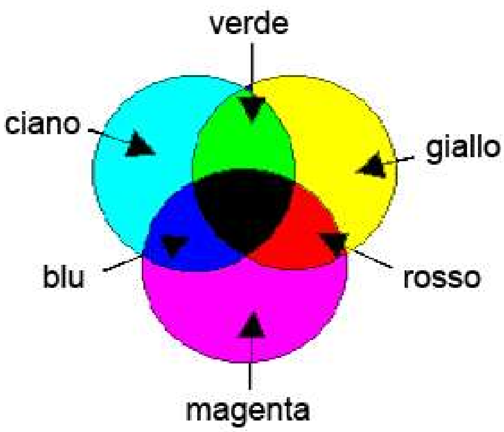


Figura 12*. I tre pigmenti fondamentali ciano, magenta e giallo, e i colori complementari rosso, verde e blu che si ottengono dalla loro composizione.*

Quando un corpo semitrasparente assorbe tutti i colori sono assorbiti allo stesso modo l’assorbimento è detto **neutro**. Alcuni materiali, come il vetro colorato, i coloranti, ecc., hanno invece un **assorbimento selettivo**: alcuni colori sono assorbiti e altri trasmessi.

Il colore rosso del Sole al tramonto e il colore azzurro del cielo sono dovuti all'assorbimento selettivo da parte dell'atmosfera terrestre, come mostra la figura 13. Le molecole dell’aria diffondono prevalentemente la luce di colore blu, sparpagliandola in tutte le direzioni. Per questo il cielo ci

appare normalmente azzurro, perché veniamo raggiunti dalla componente azzurra della luce bianca del Sole che attraversando l'atmosfera viene diffusa nelle varie direzioni. Osservando invece direttamente il Sole quando la sua luce, al tramonto, attraversa uno strato consistente di aria, ci appare rosso-arancio, perché in questo caso raccogliamo quanto resta della luce solare dopo che è stata diffusa la componente azzurra: ci appare quindi il colore rosso complementare dell'azzurro.

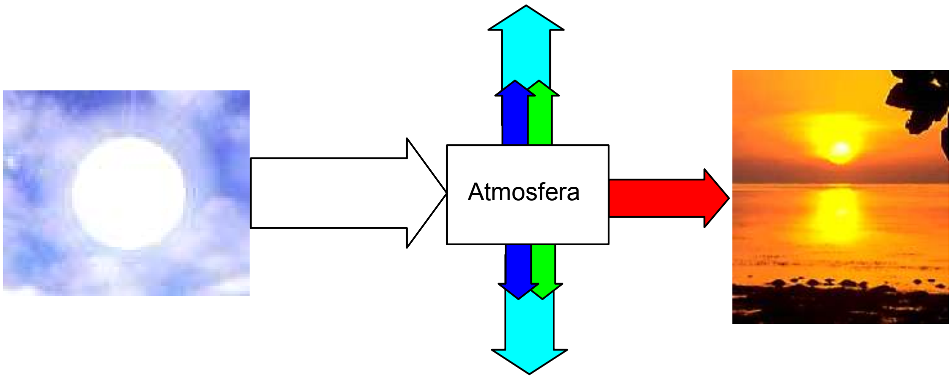


***Figura 13**. L'atmosfera terrestre diffonde in tutte le direzioni le componenti blu e verdi della luce solare. Per questo il cielo appare azzurro, mentre il disco solare, osservato al tramonto quando la luce attraversa uno spessore considerevole di aria, appare rosso, ossia del colore rimasto dopo la rimozione dalla luce bianca delle componenti blu e verdi.*

Un corpo semitrasparente può apparire di colore diverso a seconda che la luce lo attraversi, o che venga diffusa da esso. Una sottile lamina d'oro, per esempio, appare di colore giallo-arancio quando, appoggiata su una superficie opaca, è illuminata da una sorgente di luce bianca dal di sopra, ma appare di colore verdastro quando attraverso di essa si osserva in trasparenza la luce bianca emessa dalla stessa sorgente: nel primo caso vediamo la luce giallo-arancio diffusa dalla lamina d'oro, mentre nel secondo caso vediamo quanto resta della luce bianca una volta sottratta da essa la componente giallo-arancio; vediamo quindi una luce del colore verde complementare del giallo.

Esercitazione n.1: esploriamo i colori

Gli schermi televisivi e i monitor dei computer riproducono i diversi colori miscelando in opportune proporzioni luci dei tre colori fondamentali rosso, verde e blu (per questo motivo vengono anche detti "schermi RGB": in inglese Red – rosso – Green – verde – Blue - Blu).

È possibile studiare come i diversi colori vengono prodotti sullo schermo di un computer ricorrendo a opportuni programmi. Il più semplice è il programma "Microsoft Paint" che si trova in tutti i computer dotati del sistema operativo Windows. Una volta avviato il programma, si deve attivare, nel menù "Colori", il comando "Modifica colori …". Apparirà una finestra nella quale è presente un comando "Definisci colori personalizzati >>". Una volta attivato, l'aspetto della finestra sarà simile a quello

riprodotto nella figura 14. Nella parte destra della finestra vi è una "tavolozza" sotto la quale sono indicati dei valori rispettivamente di "tonalità", "saturazione", "luminosità", "rosso", "verde" e "blu".

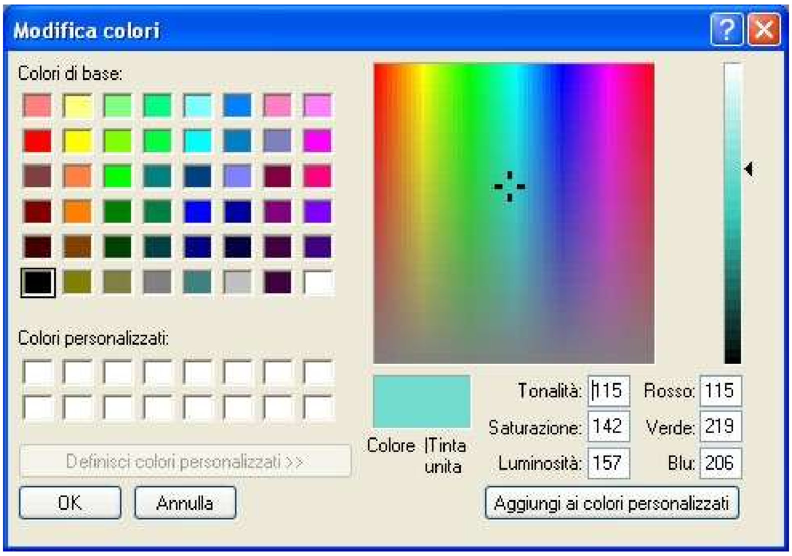


***Figura 14**. La finestra "Modifica colori" del programma Microsoft Paint.*

In questo programma i valori di "tonalità", "saturazione" e "luminosità" possono essere compresi tra 0 e 240, mentre i valori di "rosso", "verde" e "blu" possono essere compresi tra 0 e 255.

Proviamo a scrivere, nelle caselle corrispondenti a "rosso", "verde" e "blu" rispettivamente "255" (ossia il valore massimo), "0" e "0". Nella casella "Colore" apparirà una tinta rossa, mentre nelle altre caselle si avranno i valori riportati nella tabella 1: 0 per la tonalità, 240 per la saturazione e 120 per la luminosità.

Tabella 1. Valori corrispondenti al colore rosso.

	Tonalità	0	Rosso	255
	Saturazione	240	Verde	0
Colore	Luminosità	120	Blu	0

Poniamo poi "0" nella casella "rosso", "255" nella casella "verde" e "0" nella casella "blu": nella casella "Colore" apparirà una tinta "verde", mentre nelle altre caselle avremo i valori riportati nella tabella 2: 80 per la tonalità, 240 per la saturazione, 120 per la luminosità.

Tabella 2. Valori corrispondenti al colore verde.

	Tonalità	80	Rosso	0
	Saturazione	240	Verde	255
Colore	Luminosità	120	Blu	0

Poniamo infine "0" nella casella "rosso", "0" nella casella "verde" e "255" nella casella "blu": nella casella "Colore" apparirà una tinta "blu",

mentre nelle altre caselle avremo i valori riportati nella tabella 3: 160 per la tonalità, 240 per la saturazione, 120 per la luminosità.

Tabella 3. Valori corrispondenti al colore blu.

	Tonalità	160	Rosso	0
	Saturazione	240	Verde	0
Colore	Luminosità	120	Blu	255

I tre colori così ottenuti sono i colori fondamentali rosso, verde e blu utilizzati per la composizione di tutti gli altri colori che compaiono sullo schermo. Il valore di saturazione è per tutti e tre pari a 240, ossia il massimo ottenibile, mentre il valore di luminosità pari a 120, ossia a metà della scala compresa tra 0 e 240, sta a indicare che la luminosità di questi colori è intermedia tra quella del bianco (ossia 240) e quella del nero (ossia 0).

Proviamo ora a variare il valore di uno dei colori, lasciando gli altri due rispettivamente al valore 0 e 255: per esempio, poniamo 255 in "rosso", "0" in "blu", e si faccia variare il valore di "verde": si otterranno tutte le sfumature di arancione e di giallo. In ogni caso i valori di "saturazione" e di "luminosità" si mantengono inalterati e uguali rispettivamente a 240 e 120, mentre il valore di "tonalità" varia da 0 a 40. In particolare il colore corrispondente al valore 255 per "verde" è il giallo, colore complementare del blu, come mostra la tabella 4. Mantenendo poi il valore 255 per "verde" e facendo variare il valore di "rosso" da 255 a 0 si ottengono le sfumature dal giallo al verde. In modo analogo si può procedere per i colori che si possono ottenere dalla composizione di verde e blu, e in particolare per il colore cyan, complementare del rosso (tabella 5), e per i colori che si possono ottenere dalla composizione di blu e rosso, e in particolare per il colore magenta, complementare del verde (tabella 6).

Tabella 4. Valori corrispondenti al colore giallo.

	Tonalità	40	Rosso	255
	Saturazione	240	Verde	255
Colore	Luminosità	120	Blu	0

Tabella 5. Valori corrispondenti al colore cyan.

	Tonalità	120	Rosso	0
	Saturazione	240	Verde	255
Colore	Luminosità	120	Blu	255

Tabella 6. Valori corrispondenti al colore magenta.

	Tonalità	200	Rosso	255
	Saturazione	240	Verde	0
Colore	Luminosità	120	Blu	255

L'esercitazione può proseguire identificando altri colori a piacere scegliendo i tre valori di intensità dei colori fondamentali rosso, verde e blu, o assegnando una terna di valori di tonalità, saturazione e luminosità.

3. La natura della luce

La natura della **luce** è stata oggetto di studio e di discussione tra gli scienziati fin dall'antichità. Tra a fine del XVII secolo e l'inizio del XVIII secolo due tra i più grandi fisici dell'epoca svilupparono due diverse teorie sulla natura della luce: Isaac Newton (1642-1727) sostenne la teoria corpuscolare, ritenendo la luce costituita da particelle materiali emesse dalle sorgenti luminose; Christiaan Huygens (1629-1695) propose invece una teoria ondulatoria, secondo la quale la propagazione della luce è dovuta a un fenomeno ondulatorio (Huygens però riteneva erroneamente che si trattasse di onde elastiche simili alle onde sonore).

Solo nel corso del XIX secolo risultò chiaro che la luce è costituita da onde, e precisamente da onde elettromagnetiche: si tratta di perturbazioni del campo elettrico e magnetico che si propagano sia nello spazio vuoto sia nei mezzi materiali trasparenti, con una velocità grandissima pari, nel vuoto, a circa 300.000 km/s.

Possiamo farci un'idea di che cosa sia un'onda considerando che cosa avviene quando gettiamo un sasso sulla superficie dell'acqua di di uno stagno: dal punto in cui il sasso tocca la superficie dell'acqua si propagano verso l'esterno delle onde di forma circolare (figura 15). Chiamiamo **cresta** dell'onda la linea che, a un dato istante, congiunge tutti i punti in cui l'onda assume la massima altezza, e **gola** la linea che congiunge i punti in cui l'onda assume la massima depressione (figura 16).

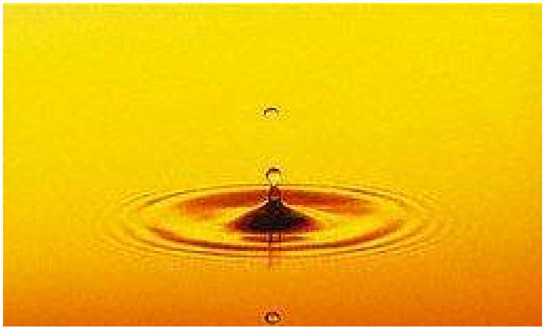



***Figura 15**. Onde che si propagano sulla superficie dell'acqua.*

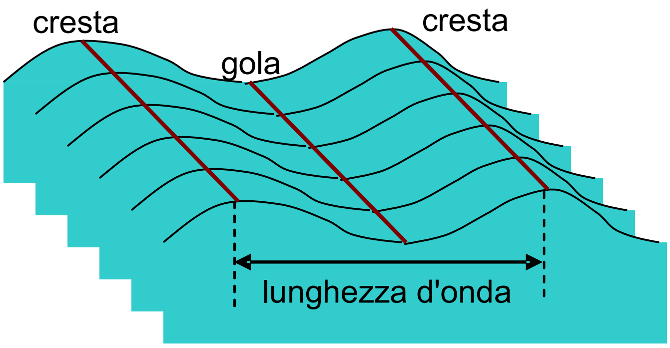


***Figura 16**. Le linee che individuano la cresta e la gola di un'onda bidimensionale.*

Un piccolo corpo galleggiante posto sulla superficie dell'acqua oscilla su e giù al passaggio dell'onda. Il numero di oscillazioni al secondo è la **frequenza** *f* dell'onda, che si misura in hertz (simbolo Hz). La distanza tra due creste successive dell'onda è la **lunghezza d'onda** λ. La frequenza *f* e la lunghezza d'onda λ sono legate alla velocità *v* di propagazione dell'onda dalla formula

$$v = \lambda f \qquad (1)$$

Sono onde elettromagnetiche, oltre alla luce, anche le onde radio, i raggi infrarossi, i raggi ultravioletti, i raggi X e i raggi γ. Ciò che distingue questi tipi di onde è la loro diversa frequenza, a cui corrisponde una diversa lunghezza d'onda. La tabella 7 riporta i valori di frequenza e lunghezza d'onda per i diversi tipi di onde elettromagnetiche. L'insieme di queste radiazioni costituisce lo **spettro elettromagnetico** (figura 17). La luce che percepiamo come luce bianca è costituita dalla sovrapposizione di luce dei diversi colori spettrali. A questi diversi colori corrispondono onde di diversa lunghezza d'onda: da 0,4 millesimi di millimetro per la luce di colore violetto a 0,7 millesimi di millimetro per la luce di colore rosso (è conveniente esprimere la lunghezza d'onda della luce in micron, ossia milionesimi di metri – simbolo μm – o in nanometri, ossia miliardesimi di metro – simbolo nm –: la luce rossa ha quindi una lunghezza d'onda di 7×10^{-7} m = 0,7 μm = 700 nm).

Tabella 7. Frequenza e lunghezza d'onda delle radiazioni elettromagnetiche.

Radiazione	*Frequenza* (Hz)	*Lunghezza d'onda* (nm)
Radio	$1 \times 10^{6} - 1 \times 10^{11}$	$3 \times 10^{11} - 3 \times 10^{6}$
Infrarosso	$1 \times 10^{11} - 4{,}2 \times 10^{14}$	$3 \times 10^{6} - 700$
Luce		
Rosso	$4{,}3 \times 10^{14}$	700
Verde	$5{,}5 \times 10^{14}$	550
Violetto	$7{,}5 \times 10^{14}$	400
Ultravioletto	$7{,}5 \times 10^{14} - 3 \times 10^{16}$	400 - 10
Raggi X	$3 \times 10^{16} - 3 \times 10^{19}$	10 – 0,01
Raggi γ	$> 3 \times 10^{19}$	< 0,01

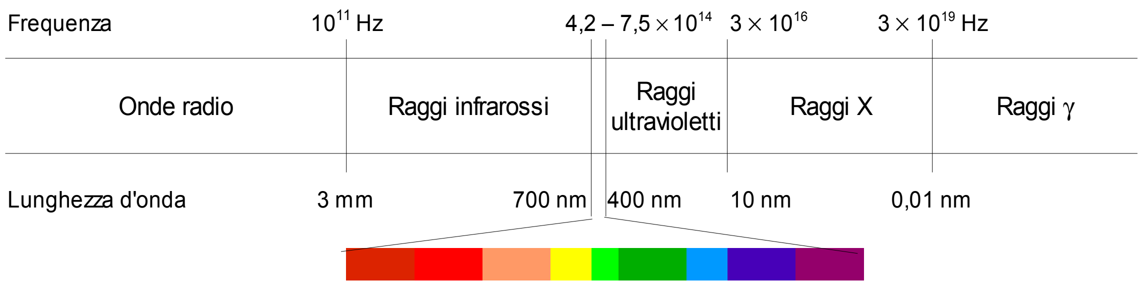


Figura 17. *Lo spettro elettromagnetico.*

Lettura: La misura della velocità della luce

La difficoltà che si incontra nella misura della velocità della luce sta nel fatto che la propagazione della luce avviene con una velocità molto grande, tale da sembrare praticamente istantanea. Effettivamente, quando Galileo Galilei all'inizio del XVII secolo tentò di misurare la velocità della luce poté solo concludere che la propagazione della luce "se non istantanea, è eccezionalmente veloce".

Il metodo utilizzato da Galileo era molto semplice. Come mostrato nella figura 18, si pose di notte a una certa distanza da un suo assistente. Ciascuno dei due portava una lanterna accesa, coperta. Quando Galileo avesse scoperto la sua lanterna, anche l'assistente avrebbe dovuto scoprire la sua, in modo che Galileo potesse misurare il tempo di andata e ritorno della luce.



Figura 18. *Tentativo di misura della velocità della luce con il metodo di Galileo.*

Naturalmente Galileo non riusci nel suo tentativo di misurare la velocità della luce. Per poter avere successo un esperimento di questo tipo richiede distanze astronomiche, molto più grandi di quelle disponibili sulla superficie terrestre.

Nel 1675 l'astronomo danese Ole Römer (1644-1710) riuscì per la prima volta a ottenere un valore per la velocità della luce da osservazioni del moto dei satelliti di Giove. Le leggi di Keplero permettevano di calcolare con precisione la posizione di questi satelliti nel loro moto intorno a Giove, e in particolare gli istanti in cui si dovevano osservare, con un telescopio, le eclissi dei satelliti da parte del disco del pianeta. Si osservavano però ritardi anche di un quarto d'ora, in corrispondenza alla diversa distanza della Terra da Giove dovuta al moto di rivoluzione dei due pianeti intorno al Sole.

Römer ipotizzò che questi ritardi fossero dovuti al tempo necessario alla luce per attraversare l'orbita terrestre. Consideriamo la figura 19: quando la Terra e Giove si trovano nella posizione *A*, corrispondente alla loro minima distanza D_{min}, le posizioni in cui si trovano i satelliti di Giove vengono osservate da un osservatore posto sulla Terra con un ritardo Δt_{min} pari al tempo necessario alla luce proveniente da Giove, di cui indichiamo con *c* la velocità, per percorrere la distanza D_{min}:

$$\Delta t_{\min} = \frac{D_{\min}}{c}$$

Quando invece la Terra e Giove, qualche mese dopo, si trovano nella posizione *B* corrispondente alla loro massima distanza D_{max}, le posizioni in cui si trovano i satelliti di Giove vengono osservate da un osservatore posto sulla Terra

con un ritardo Δt_{max} pari a

$$\Delta t_{max} = \frac{D_{max}}{c}$$

Confrontando le posizioni dei satelliti di Giove osservate con quelle previste in base alle leggi di Keplero si ottiene la differenza $\Delta t_{max} - \Delta t_{min}$, e poiché la differenza tra la massima e la minima distanza tra Giove e la Terra, $D_{max} - D_{min}$, è pari a due volte il raggio R dell'orbita terrestre, si può calcolare

$$c = \frac{D_{max} - D_{min}}{\Delta t_{max} - \Delta t_{min}} = \frac{2R}{\Delta t_{max} - \Delta t_{min}} \qquad (3)$$

Il valore della velocità della luce ottenuto da Römer fu di $2{,}14 \times 10^8$ m/s, che si avvicina al valore corretto per lo meno quanto all'ordine di grandezza.

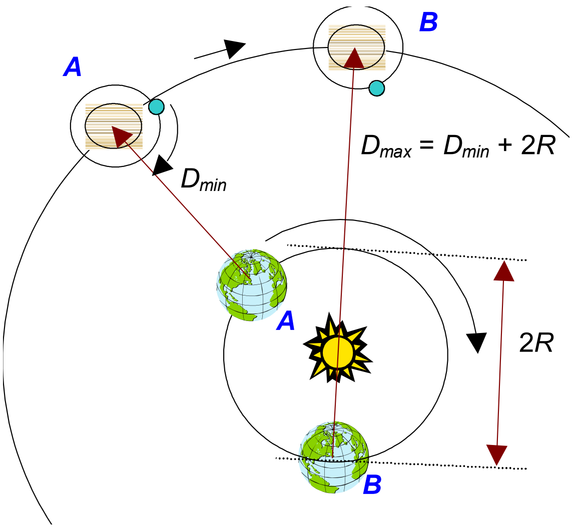


***Figura 19**. A causa del moto della Terra e di Giove intorno al Sole, la distanza tra questi due pianeti può variare di 300 milioni di chilometri. Il tempo impiegato dalla luce per percorrere questa distanza (circa 16 min) può essere misurato confrontando la posizione dei satelliti di Giove osservata dalla Terra con quella prevista in base alle leggi di Keplero.*

Sempre ricorrendo a metodi astronomici, nel 1729 l'inglese James Bradley (1693-1762) ottenne un valore più preciso, pari a $3{,}04 \times 10^8$ m/s. Bradley ricavò questo valore dalla sua osservazione dell'aberrazione della luce stellare dovuta al moto della Terra nella sua orbita intorno al Sole.

La posizione delle stelle sulla volta celeste non è fissa, ma presenta una oscillazione annuale che per le stelle poste in direzione perpendicolare al piano dell'orbita terrestre ha un'ampiezza massima di 20",48. Per spiegare questo fatto, osserviamo la figura 20. Consideriamo un raggio di luce che da una direzione α giunge all'obiettivo O di un telescopio. Nel tempo impiegato dalla luce per percorrere la distanza OV all'interno del telescopio, la Terra e con essa il telescopio si muove lungo la sua orbita con una velocità v pari a 30 km/s e si sposta nella posizione $O'V'$. Perché la luce proveniente da α possa giungere all'oculare del telescopio nel punto V', il telescopio deve essere puntato in una direzione α': la posizione apparente delle stelle è quindi diversa dalla loro posizione reale α.

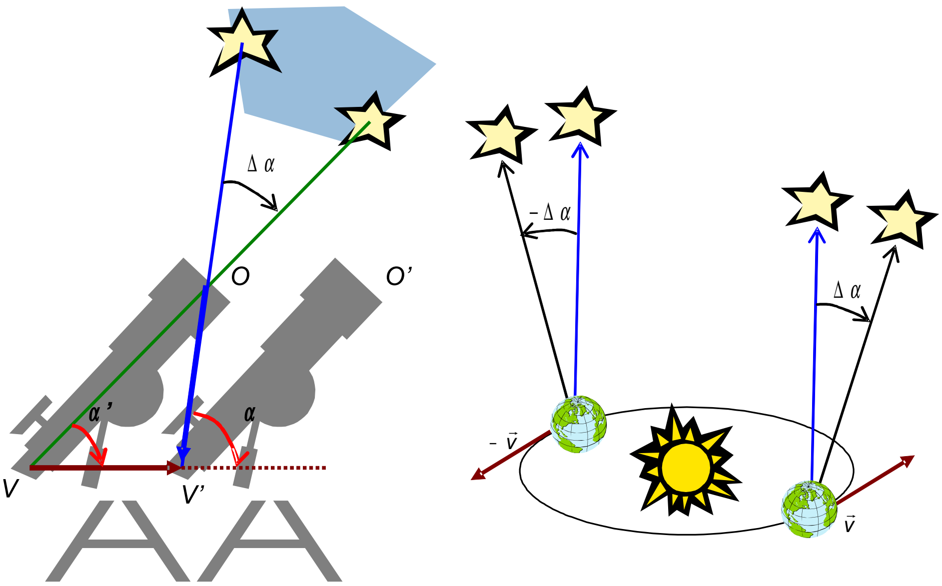


Figura 20*. A causa del moto della Terra nella sua orbita intorno al Sole e della velocità finita della luce, la posizione apparente α' delle stelle è diversa dalla loro posizione reale α. Dalla misura dello spostamento delle stelle sulla volta celeste nel corso di un anno, conoscendo la velocità v con cui la Terra si muove lungo la sua orbita si può ricavare la velocità c della luce.*

A causa del movimento della Terra intorno al Sole, nel corso di un anno la posizione della stella sulla volta celeste varia descrivendo un'ellisse che ha un semiasse maggiore $\Delta\alpha$ dalla cui misura si può quindi ricavare la velocità *c* della luce. L'osservazione di Bradley fu anche la prima prova osservativa del moto della Terra intorno al Sole e quindi della teoria copernicana.

Per ottenere una misura della velocità della luce con un metodo terrestre si dovette aspettare fino al 1849. Il fisico francese Hippolyte Louis Fizeau (1819-1896) utilizzò un dispositivo il cui schema è mostrato nella figura 21.

La luce proveniente da una sorgente *S* viene fatta convergere da una lente L_1, dopo essere stata riflessa da uno specchio R_1, nel punto *F* che corrisponde al bordo di una ruota dentata *D*. La luce quindi viene inviata attraverso una seconda lente L_2 verso un secondo specchio R_2 posto a grande distanza *d*, e da questo rimandata verso la lente L_2. Lo specchio R_1 è semitrasparente, ossia è costituito da una lastra di vetro ricoperta da uno strato di argento così sottile che circa metà della luce che incide su di esso lo attraversa, anziché essere riflessa. Parte della luce che raggiunge R_1 dopo essere stata riflessa dallo specchio R_2 può quindi essere osservata attraverso la lente L_3 da un osservatore posto dietro R_1.

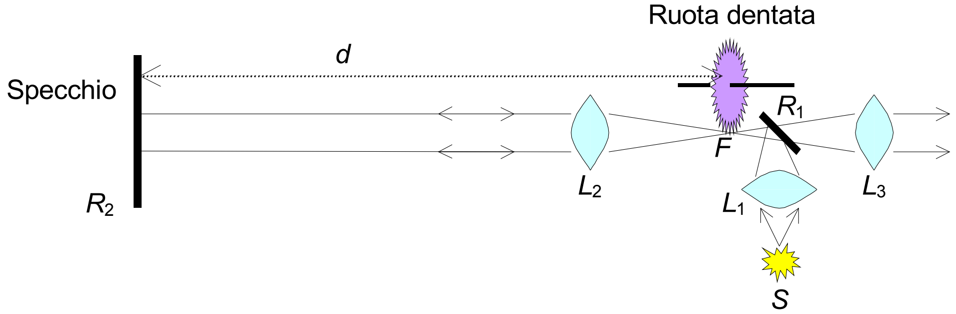


Figura 21*. Il dispositivo utilizzato da Fizeau per la misura della velocità della luce.*

Supponiamo che la ruota dentata D abbia n denti e ruoti con velocità angolare ω. La velocità della ruota è regolata in modo tale che, nel tempo

$$\Delta t = \frac{2d}{c}$$

impiegato dalla luce, che viaggia con velocità c, per effettuare il percorso di andata e ritorno fino allo specchio R_2, la ruota dentata D ruoti di un angolo pari a π/n radianti, corrispondente alla distanza angolare tra il centro di un dente e il centro dello spazio vuoto adiacente. Questo si ottiene incrementando progressivamente la velocità angolare ω della ruota, finché l'osservatore posto dietro la lente L_3 non osserva più luce, perché tutta la luce che passa attraverso un vuoto della ruota dentata viaggiando verso lo specchio R_2, al suo ritorno è schermata dal dente successivo della ruota che si è nel frattempo interposto al percorso del raggio di luce. Si ha allora

$$\Delta t = \frac{2d}{c} = \frac{\pi}{n\omega}$$

da cui si ricava

$$c = \frac{2nd\omega}{\pi} \qquad (3)$$

Fizeau utilizzò una ruota dentata con n = 720 denti con uno specchio R_2 posto a una distanza d = 8,63 km, ottenendo un valore di $3{,}15 \times 10^8$ m/s per la velocità della luce.

Il metodo fu perfezionato dal francese Léon Foucault (1819-1869) che, sostituendo la ruota dentata con uno specchio rotante, poté effettuare la misura in laboratorio su una distanza di pochi metri ottenendo un valore per la velocità della luce **nell'aria** di $2{,}98 \times 10^8$ m/s. Interponendo un tubo pieno d'acqua tra la lente L_2 e lo specchio R_2 Foucault poté anche effettuare la misura della velocità della luce **nell'acqua**, ottenendo un valore pari a circa tre quarti di quello ottenuto nell'aria.

Sempre perfezionando lo stesso metodo, il fisico statunitense Albert A. Michelson (1852-1931) giunse nel 1927 a determinare un valore di $2{,}99798 \times 10^8$ m/s per la velocità della luce nel vuoto. Negli anni successivi vennero ideati nuovi metodi che permisero di misurare la velocità della luce nel vuoto con sempre maggiore precisione. Nel frattempo si era verificato sperimentalmente che la luce si propaga nel vuoto con una velocità costante e indipendente dal sistema di riferimento dell'osservatore. Per questo motivo la XVI Conferenza Generale dei Pesi e delle Misure riunitasi nel novembre del 1983 decise di adottare $c = 2{,}99792458 \times 10^8$ m/s, come risultava dalle più precise misure allora disponibili, come valore per la velocità della luce nel vuoto, e di utilizzare questo valore della velocità della luce per definire il metro come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto in 1/299.792.458 s.

4. La propagazione rettilinea delle luce

La luce si propaga normalmente in linea retta, come può essere verificato osservando un raggio luminoso che filtra, attraverso la persiana semichiusa di una finestra, in una stanza buia nella quale vi sia fumo o polvere. Il percorso rettilineo del **raggio luminoso** appare allora evidente come una striscia luminosa che attraversa la stanza: quello che osserviamo sono le particelle di polvere o di fumo illuminate dal raggio di luce, che diffondono parte di questa luce in tutte le direzioni.



Figura 22. *Particelle di polvere o goccioline d'acqua presenti nell'aria possono evidenziare il tracciato dei raggi luminosi.*

La propagazione rettilinea della luce è dimostrata anche dalla presenza delle **ombre**: un corpo opaco illuminato da una sorgente di luce puntiforme, tale cioè che i raggi di luce provenienti da essa abbiano in ogni punto la stessa direzione, lascia dietro di sé una regione detta **cono d'ombra** nella quale non vi è illuminazione (figura 23).

Se però, come avviene nella maggior parte dei casi, la sorgente luminosa non è puntiforme, l'ombra appare sfumata: intorno all'ombra, nella quale non vi è illuminazione, vi è una regione, detta **penombra**, raggiunta solo da una parte dei raggi luminosi emessi dalla sorgente (figura 24).

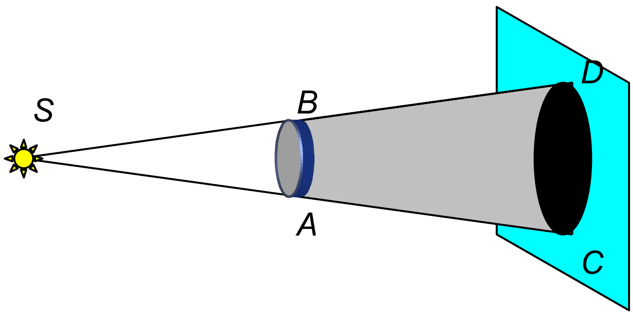


Figura 23. *Ombra prodotta su uno schermo da un corpo opaco AB illuminato da una sorgente luminosa puntiforme S.*

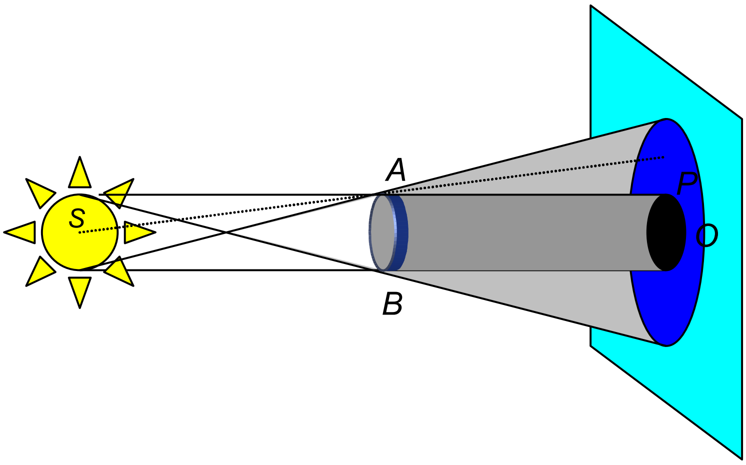


Figura 24. *L'ombra O e la penombra P prodotte su uno schermo da un corpo opaco AB illuminato da una sorgente luminosa estesa S.*

Volendo essere più precisi, occorre precisare che la luce si propaga in linea retta solo nel vuoto o all'interno di un "mezzo omogeneo". Alcune definizioni ci aiuteranno a capire questa espressione:

- si dice **mezzo ottico** ogni materiale trasparente nel quale si propaga la luce;
- si dice **omogeneo** un materiale che ha le stesse proprietà in tutti i suoi punti; la maggior parte dei mezzi ottici sono omogenei;
- si dice **isotropo** un materiale che ha le stesse proprietà in tutte le direzioni; la maggior parte dei mezzi ottici sono isotropi.

Quando la luce è emessa da una sorgente puntiforme in un mezzo isotropo omogeneo, si disperde uniformemente con la stessa velocità in tutte le direzioni. La sua posizione in istanti di tempo successivi sarà data da sfere con la sorgente nel centro, come è mostrato nella figura 25. Queste superfici sferiche immaginarie vengono dette **fronti d'onda**.

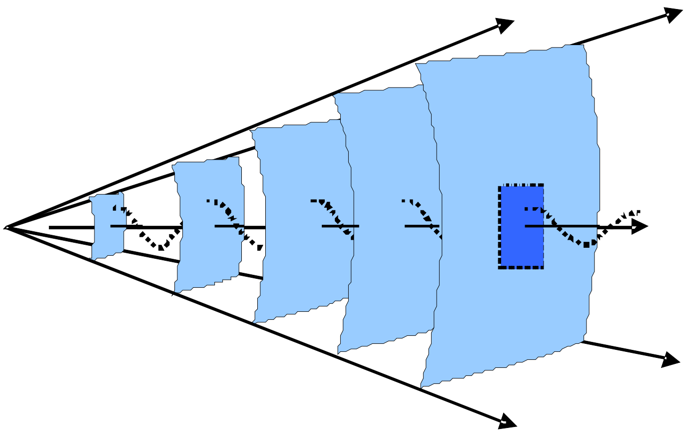


Figura 25. *I fronti d'onda concentrici e i raggi divergenti di un'onda sferica: una piccola porzione di un'onda sferica lontana dalla sorgente (in colore più scuro) può essere approssimata da un'onda piana.*

Le linee lungo cui si propaga la luce sono rette perpendicolari ai fronti d'onda che si dicono **raggi**. I raggi di luce provenienti da una sorgente puntiforme si allargano man mano che si allontanano dalla sorgente: questi raggi si dicono **divergenti** (figura 25).

Una piccola porzione di un'onda sferica lontana dalla sorgente appare come un **fronte d'onda piano**: i raggi luminosi in questo caso sono praticamente **paralleli** (figura 26).

Se invece i raggi si restringono man mano che si procede nella direzione di propagazione della luce, si dicono **convergenti**.

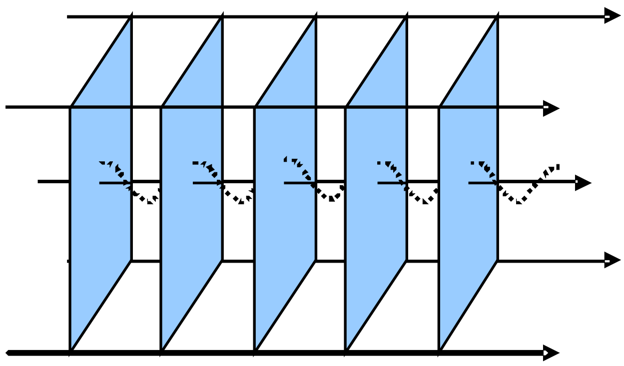


Figura 26*. I fronti d'onda paralleli di un'onda piana.*

5. La riflessione della luce

Quando un corpo la cui superficie è particolarmente liscia (una lastra di vetro, o una superficie metallica) viene raggiunto dalla luce emessa da una sorgente luminosa, ne rinvia una parte in una direzione ben determinata che dipende dalla direzione di provenienza della luce. Si ha allora il fenomeno della **riflessione** della luce. Questo tipo di riflessione è detta **regolare** o **speculare**.

Se però la superficie del corpo non è sufficientemente liscia, come avviene nella maggior parte dei casi, ogni irregolarità della superficie rifletterà luce in una direzione differente e la luce incidente viene sparpagliata in tutte le direzioni. È grazie a questo fenomeno, che si dice **riflessione irregolare** o **diffusione** della luce, che possiamo vedere gli oggetti che ci circondano, quando sono illuminati dalla luce emessa da una sorgente luminosa.

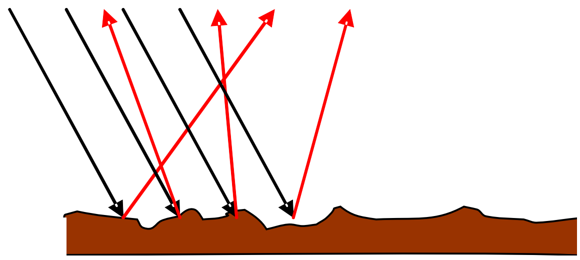


Figura 27. *La riflessione dei raggi luminosi su una superficie scabra dà luogo al fenomeno della diffusione: i raggi luminosi riflessi vengono sparpagliati in tutte le direzioni.*

La quantità di luce riflessa da una superficie varia molto a seconda del materiale. La luce diffusa, per esempio, da carta bianca, grigia e nera è rispettivamente circa l'80%, il 25% e l'8% della luce incidente, ossia della luce che arriva sulla superficie. Solo pochi materiali riflettono più del 90% ed è anche piuttosto difficile ottenere materiali che riflettono poca luce. Esistono speciali vernici nere utilizzate all'interno di strumenti ottici dove la luce diffusa deve essere assorbita il più rapidamente possibile.

Per quanto riguarda la riflessione speculare, molto dipende dalla qualità della lucidatura. Una superficie lucidata di acciaio riflette meno di una superficie di argento. Le superfici più lisce si possono ottenere con il vetro e la maggior parte degli **specchi** sono fatti depositando su vetro lucidato un sottile strato di metallo o di un altro materiale riflettente. Il rapporto tra la luce riflessa e la luce incidente si dice **riflettività** dello specchio.

Nessuna superficie lucidata è perfettamente liscia, a motivo della struttura molecolare dei materiali. Tuttavia, se le irregolarità sono più piccole della lunghezza d'onda della luce incidente, la riflessione è perfettamente speculare.

Nel caso delle sostanze trasparenti, come il vetro, l'acqua, ecc., la riflettività speculare dipende non solo dall'angolo con cui la luce incidente raggiunge la superficie, ma anche dalla differenza tra gli indici di rifrazione (si veda più avanti) dei due mezzi. Per esempio, se dei pezzi di vetro da occhiali sono posti nella glicerina o, meglio ancora, nel balsamo del Canada, che sono materiali che hanno quasi lo stesso indice di rifrazione del vetro, praticamente non vi è luce riflessa dalla superficie del vetro e i pezzi di vetro diventano quasi invisibili. Un effetto simile si ha nel caso di macchie di grasso sulla carta: il grasso che riempie i pori della carta ha un indice di rifrazione più vicino a quello delle fibre della carta che a quello dell'aria, e quindi è riflessa meno luce. Per questo la macchia appare più scura della carta che la circonda.

Abbiamo già visto che la luce riflessa da alcuni materiali è colorata. Ciò avviene perché, dei vari colori spettrali che compongono la luce bianca, solo alcuni sono riflessi mentre gli altri sono assorbiti. Questa riflessione è detta **selettiva**. Abbiamo già visto che:

- un corpo appare bianco quando diffonde tutti i colori che compongono la luce da cui viene illuminato (si torni a vedere la figura 10);

- un corpo appare nero se assorbe tutti i colori, senza diffonderne nessuno;

- un corpo appare rosso quando viene illuminata da una luce bianca se la sua superficie assorbe tutti i colori tranne il rosso, che viene diffuso (si torni a vedere la figura 11);

- lo stesso corpo illuminato con una luce di colore blu o verde, cioè con una luce che non contiene una componente rossa, esso appare nero, perché tutta la luce che raggiunge la sua superficie viene assorbita;

- lo stesso avviene per gli altri colori: un corpo appare per esempio verde quando viene illuminata da una luce bianca se la sua superficie assorbe tutti i colori tranne il verde, che viene diffuso; se questo corpo viene illuminato con luce rossa o blu, cioè con una luce che non contiene una componente verde, appare nero, perché tutta la luce che raggiunge la sua superficie viene assorbita.

6. Le leggi della riflessione

Dal punto di vista geometrico, le leggi che regolano il fenomeno della riflessione sono abbastanza semplici. Consideriamo un raggio luminoso *I* emesso da una sorgente *S* che colpisce una superficie riflettente piana in un punto *P*. Indichiamo con *i* l'**angolo di incidenza**, ossia l'angolo compreso tra la direzione del raggio luminoso *I* e la retta **normale** (ossia perpendicolare) alla superficie riflettente passante per *P*, come mostrato nella figura 28. Indichiamo poi con *R* il raggio riflesso, e con *r* l'**angolo di riflessione**, ossia l'angolo compreso tra la direzione del raggio riflesso *R* e la retta normale alla superficie riflettente passante per *P*.

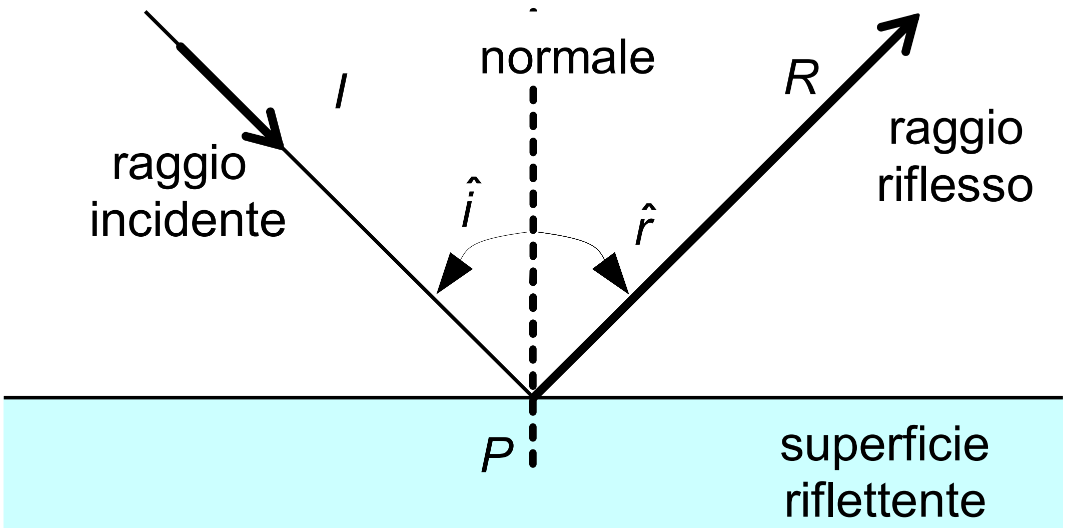


Figura 28. *La riflessione di un raggio luminoso su una superficie riflettente.*

La relazione tra la direzione del raggio incidente e la direzione del raggio riflesso si può determinare sperimentalmente ed è data dalle seguenti **leggi della riflessione**:

1° Legge della riflessione: il raggio incidente, il raggio riflesso e la retta normale alla superficie di riflessione nel punto di incidenza giacciono nello stesso piano.

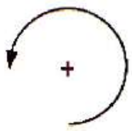
2° Legge della riflessione: l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza; scriviamo questa legge così:

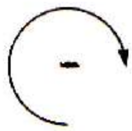
$$r = - i \qquad (4)$$

Il segno "meno" che compare nella formula (4) fa riferimento ad alcune delle regole che vengono normalmente utilizzate in Ottica e a cui conviene iniziare ad abituarsi; in particolare:

- **gli angoli di incidenza e di riflessione sono misurati dalla normale alla superficie al raggio;**

- **angoli misurati in senso antiorario hanno valori positivi; angoli misurati in senso orario hanno valori negativi:**





Nel caso mostrato nella figura 28, l'angolo di incidenza *i* viene misurato partendo dalla retta normale e ruotando verso il raggio incidente *I*. Dato che la rotazione avviene in senso antiorario (ossia in senso contrario a quello in cui ruotano le lancette dell'orologio), l'angolo *i* deve essere considerato **positivo**. L'angolo di riflessione *r* viene invece misurato in senso orario, ruotando dalla retta normale verso il raggio riflesso *R*, e deve quindi essere considerato **negativo**. Il segno "meno" nella formula (4) ci indica quindi che i due angoli, che hanno uguale valore assoluto, hanno però **segno contrario**.

Nel caso in cui il raggio luminoso *I* incida perpendicolarmente sulla superficie riflettente, sono nulli sia l'angolo di incidenza *i* sia l'angolo di riflessione *r*. Il raggio luminoso viene quindi riflesso ritornando nella stessa direzione del raggio incidente. Si parla in questo caso di **incidenza normale**. Si ha invece **incidenza radente** quando l'angolo di incidenza è molto grande, prossimo a 90°.

7. Gli specchi piani

Quando guardiamo una superficie piana riflettente, come uno specchio ordinario, vediamo (apparentemente dietro lo specchio) immagini di oggetti che sono davanti allo specchio. Parte della luce proveniente da ciascun oggetto puntiforme è riflessa sulla superficie dello specchio e raggiunge l'occhio *come se* venisse da un punto posto dietro lo specchio. Questi punti non esistenti posti dietro la superficie riflettente formano immagini che sono chiamate **immagini virtuali**. Le possiamo vedere ma non possiamo toccarle. La luce proveniente dagli oggetti originali diverge e continua a divergere dopo la riflessione sulla superficie piana.

A volte, la riflessione (o la rifrazione) su una superficie curva fa convergere di nuovo la luce in un punto e si formano immagini che esistono realmente nella posizione in cui converge la luce. Queste immagini, che possono essere raccolte su uno schermo, sono dette **immagini reali**. Esempi di queste immagini sono quelle formate su una pellicola dall'obiettivo di una macchina fotografica e le immagini formate su uno schermo da un proiettore di diapositive.

Consideriamo ora la riflessione su uno **specchio piano** di un'onda sferica emessa da un oggetto *P* **puntiforme** (figura 29).

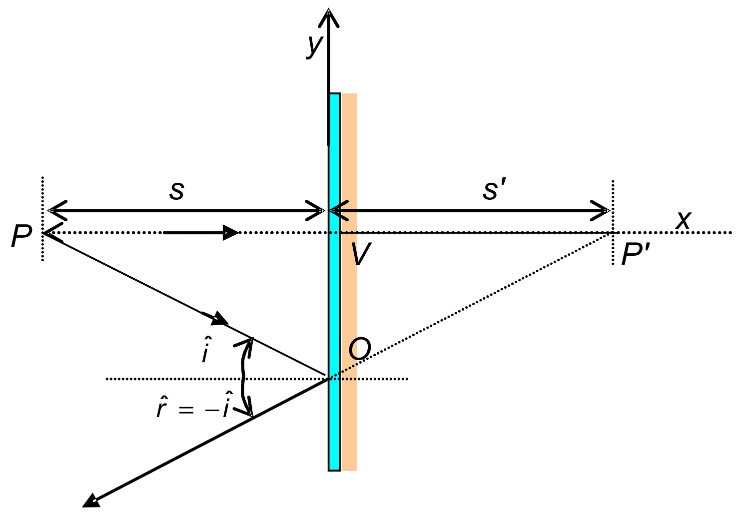


Figura 29*. Costruzione geometrica dell'immagine di una sorgente puntiforme P prodotta da uno specchio piano.*

I raggi luminosi corrispondenti all'onda che si propaga nelle diverse direzioni sono semirette che si dipartono da *P*. Quando raggiungono la superficie dello specchio vengono deviati in accordo con la seconda legge della riflessione: l'angolo di riflessione $\hat{r}$ è uguale in valore assoluto all'angolo di incidenza $\hat{i}$ (e di segno opposto, se si misurano gli angoli come nella figura 29 a partire dalla retta normale). Consideriamo allora:

– il raggio *PV* che raggiunge lo specchio perpendicolarmente alla sua

superficie, e immaginiamo di prolungarlo al di là dello specchio;

- consideriamo anche un generico raggio *PO* che raggiunge lo specchio in un punto *O* con un angolo di incidenza $\hat{i}$, e il raggio riflesso che da *O* si allontana dalla superficie dello specchio con un angolo di riflessione $\hat{r} = -\hat{i}$;

- immaginiamo di prolungare questo raggio al di là dello specchio fino a intersecare il prolungamento di *PV* nel punto *P'*.

Dall'uguaglianza dell'angolo di riflessione $\hat{r}$ e dell'angolo di incidenza $\hat{i}$ segue che i due angoli $P\hat{O}V$ e $P'\hat{O}V$ sono uguali, e quindi i due triangoli rettangoli *OVP* e O*VP'*, che hanno il lato *VO* in comune, sono congruenti. Sono quindi uguali i due segmenti *PV* e *VP'*. Se conveniamo di utilizzare un sistema di coordinate cartesiane con l'origine nel punto *V* e l'asse *x* diretto da sinistra verso destra, e indichiamo con *s* l'ascissa dell'oggetto *P* e con *s'* l'ascissa del punto *P'*, possiamo porre

$$s' = -s \qquad (5)$$

Poiché il raggio *PO* è stato scelto in modo arbitrario, la stessa relazione (5) vale per tutti i raggi emessi da *P* che incidono sulla superficie dello specchio: i prolungamenti dei corrispondenti raggi riflessi si intersecano nel punto *P'* posto, dietro lo specchio, a una distanza *s'* pari alla distanza *s* dell'oggetto *P* dallo specchio. È come se tutti questi raggi riflessi provenissero da una sorgente puntiforme posta nel punto *P'* simmetrico a *P* rispetto allo specchio: si dice allora che *P'* è l'**immagine** dell'oggetto *P*.

Consideriamo ora una situazione in cui, anziché avere un oggetto puntiforme *P*, abbiamo davanti allo specchio una sorgente luminosa **estesa**, per esempio un segmento *PQ* illuminato (figura 30).

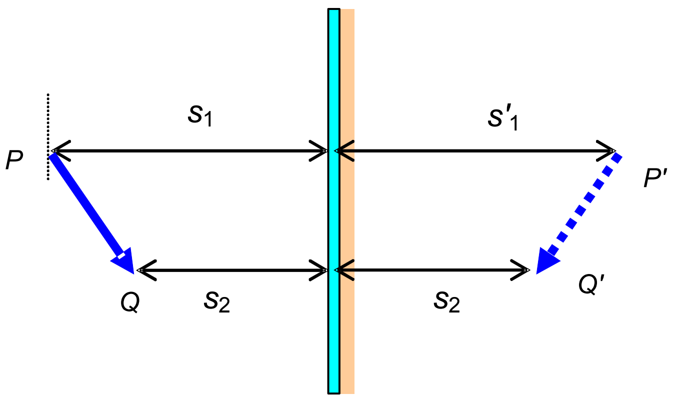


***Figura 30**. Costruzione geometrica dell'immagine di una sorgente estesa PQ prodotta da uno specchio piano.*

I raggi luminosi emessi dall'estremo *P* del segmento, posto a una distanza s_1 dallo specchio, si riflettono su di esso formandone un'immagine nel punto *P'* simmetrico a *P*, di ascissa $s'_1 = -s_1$. Anche i raggi emessi

dall’estremo *Q*, posto a una distanza s_2 dallo specchio, si riflettono su di esso formandone un’immagine nel punto Q′ simmetrico a *Q*, di ascissa $s'_2 = -s_2$. Lo stesso avviene per tutti i punti intermedi del segmento *PQ*, che insieme danno origine a un’immagine costituita da un segmento *P'Q'* simmetrico a *PQ* rispetto allo specchio. Lo specchio produce quindi un’immagine *P'Q'* dell’oggetto *PQ* che ha la stessa lunghezza di *PQ*: l’immagine non presenta né un ingrandimento, né un rimpicciolimento dell’oggetto. L’immagine *P'Q'* è però **invertita** rispetto a *PQ*: la parte destra dell'immagine corrisponde alla parte sinistra dell'oggetto e viceversa.

Possiamo quindi concludere che **uno specchio piano produce un’immagine simmetrica degli oggetti che sono posti davanti ad esso che non è né ingrandita né rimpicciolita, con un’inversione che opera uno scambio tra destra e sinistra**. Un uomo che porta un orologio al polso sinistro, per esempio, appare nell’immagine riflessa da uno specchio come se portasse l’orologio al polso destro.

Conviene precisare ancora che l'immagine formata da uno specchio piano è un'immagine virtuale. Quando un’immagine è formata da raggi luminosi che realmente si intersecano in un punto *P′* si parla di un’**immagine reale** *P′*. Quando per esempio, con una lente convergente, concentriamo in un punto i raggi luminosi del Sole, ne otteniamo un’immagine reale, nella quale effettivamente si ha una concentrazione di raggi luminosi e di energia, che può giungere a bruciare un pezzo di carta. Se invece dei raggi luminosi che non passano per un punto *P′* **sembrano** però provenire da esso perché vi si concentrano i loro prolungamenti, come nel caso dell’immagine *P′* dell’oggetto puntiforme *P* prodotta dallo specchio piano, allora si dice che *P′* è un’**immagine virtuale**: per un osservatore posto davanti allo specchio è **come se** in *P′* ci fosse un’immagine reale. Quindi, **uno specchio piano produce un’immagine virtuale degli oggetti che sono posti davanti ad esso**.

8. Questioni varie sugli specchi piani

Il campo di vista degli specchi piani

L'estensione dell'immagine che viene prodotta da uno specchio piano e che può essere vista da un osservatore posto in una data posizione dipende dalle dimensioni dello specchio e dalla posizione dell'osservatore. Questa zona in cui si trovano gli oggetti che possono essere visti è chiamata **campo di vista** dello specchio.

Spesso è necessario determinare quanto deve essere grande uno specchio e dove esso si deve trovare, perché da una data posizione possa essere visto interamente un oggetto riflesso dallo specchio. Questo problema può essere risolto sia trattando lo specchio come se fosse un'apertura attraverso cui si guarda l'immagine; o prendendo la posizione dell'occhio riflesso dallo specchio e guardando l'oggetto, sempre trattando lo specchio come un'apertura.

Consideriamo la figura 31 nella quale l'osservatore è posto in O e guarda verso lo specchio piano DE. OD e OE sono le direzioni estreme lungo cui l'occhio può vedere immagini riflesse nello specchio. I raggi riflessi DO e EO corrispondono ai raggi incidenti sullo specchio dai punti Q e R dell'oggetto. La distanza QR è quindi l'estensione dell'oggetto di cui può essere vista l'immagine Q'R' dalla posizione O. Dalla figura abbiamo

$$\frac{Q'R'}{OB'} = \frac{DE}{OA} \quad \text{e} \quad \frac{QR}{BO'} = \frac{DE}{AO'}$$

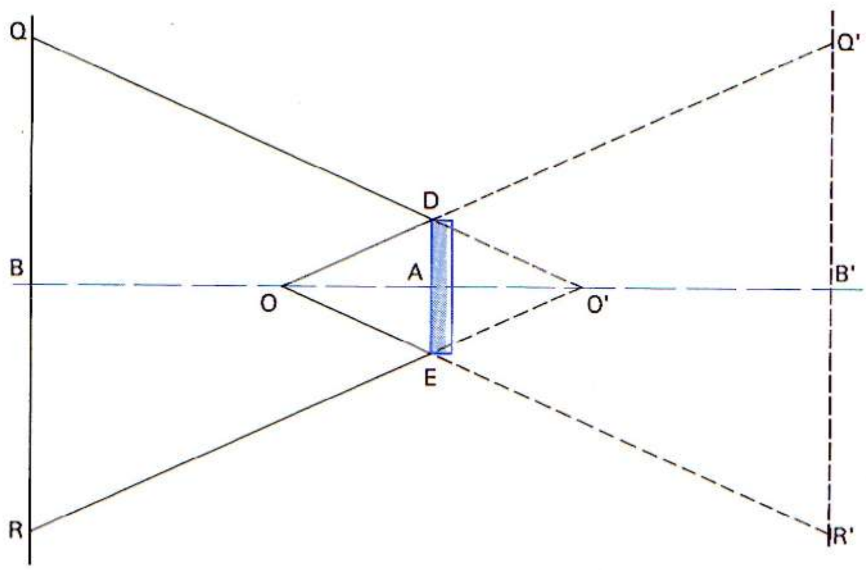


***Figura 31**. Campo di vista di uno specchio piano.*

O' è l'immagine della posizione dell'occhio e quindi OA = AO'. BA = AB' e quindi BO = OB'.

La dimensione Q'R' dell'immagine che può essere vista è uguale alla dimensione QR dell'oggetto che può essere visto, ed entrambe sono date da

$$QR = Q'R' = \frac{DE \times OB'}{AO} = \frac{DE \times OB'}{AO'} \qquad (6)$$

Invertendo questa formula ricaviamo la dimensione DE di uno specchio che ci permette di vedere interamente un oggetto di dimensioni QR:

$$DE = \frac{QR \times AO}{OB'} \qquad (7)$$

Se per esempio ci troviamo a una distanza OA = 50 cm = 0,50 m da uno specchio piano che ha un'altezza e osserviamo l'immagine di un oggetto alto QR = 1,20 m che si trova a una distanza BA = 2,50 m dallo specchio, vedremo l'immagine come se fosse a una distanza

OB' = OA + AB' = 0,50 m + 2,50 m = 3,00 m

Per vedere interamente l'oggetto riflesso nello specchio la dimensione dello specchio deve essere almeno pari a

$$DE = \frac{QR \times AO}{OB'} = \frac{1{,}20 \times 0{,}50}{3{,}00}\, m = 0{,}20\, m = 20\, cm$$

La rotazione di uno specchio piano

Quando un fascio di luce è riflesso da uno specchio piano c'è un cambiamento nella direzione del fascio di luce. Vogliamo ora studiare come l'angolo di cui il fascio è ruotato (ossia l'**angolo di deviazione**) dipende dall'angolo di incidenza.

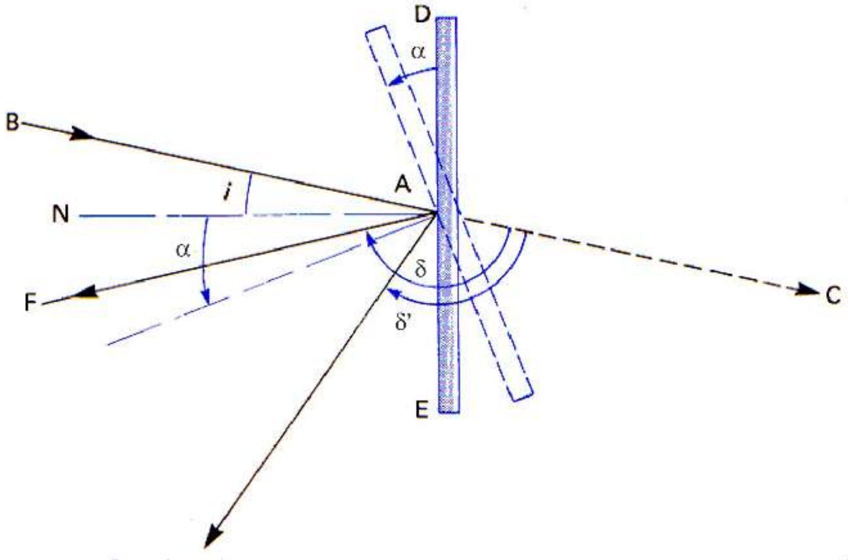


Figura 32. *Specchio in rotazione.*

Consideriamo la figura 32. Il raggio BA incide sullo specchio DE e continuerebbe fino a C se non fosse riflesso nella direzione AF. L'angolo δ è l'angolo di deviazione ed è dato da

$$\delta = 180° - 2i \qquad (8)$$

Si supponga ora che lo specchio venga ruotato di un angolo α. Il nuovo angolo di incidenza è $i + \alpha$. Quindi, il nuovo angolo di deviazione è dato da:

$$\delta' = 180° - 2(i + \alpha) \qquad (9)$$

La differenza tra δ e δ' è data da:

$$\delta - \delta' = 2\alpha \qquad (10)$$

Perciò **il fascio di luce riflesso da uno specchio ruotante ruota del doppio dell'angolo di cui è ruotato lo specchio**.

La riflessione su uno specchio mobile viene utilizzata in alcuni strumenti di misura (bilance di torsione, galvanometri) per misurare con precisione piccole rotazioni. La figura 33 rappresenta una bilancia di torsione costituita da un'asta orizzontale A sospesa a un sottile filo F. Un raggio di luce è indirizzato verso un piccolo specchio fissato al filo, e la posizione del raggio riflesso viene individuata sulla scala graduata S. A una rotazione φ dell'asta orizzontale corrisponde una rotazione 2φ del raggio di luce riflesso, che può essere misurata sulla scala S. Un dispositivo di questo genere viene detto **leva ottica**.

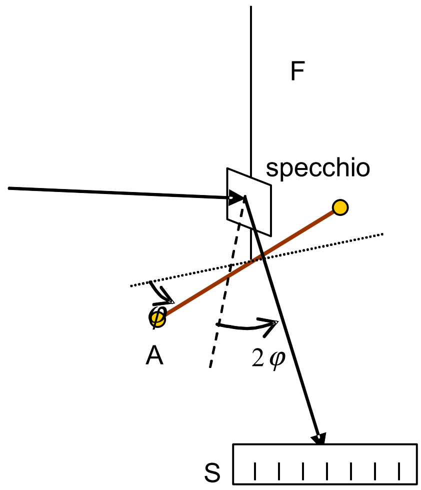


***Figura 33**. Leva ottica.*

La riflessione su due specchi

A volte avviene che un raggio di luce incida successivamente su **due specchi** inclinati tra loro. In questi casi si possono produrre **immagini multiple** degli stessi oggetti.

Se poi il raggio di luce che incide successivamente su due specchi inclinati tra loro si trova nello stesso piano delle normali ai due specchi, la deviazione totale dipende solo dall'angolo tra i due specchi e non dall'angolo di incidenza. Per questo, se i due specchi sono ruotati insieme in quello stesso piano, non si ha nessun cambiamento nella direzione finale della luce.

Vediamo di studiare queste situazioni. Nella figura 34 la deviazione totale del raggio è la somma delle deviazioni dovute a ciascuna riflessione:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \qquad (11)$$

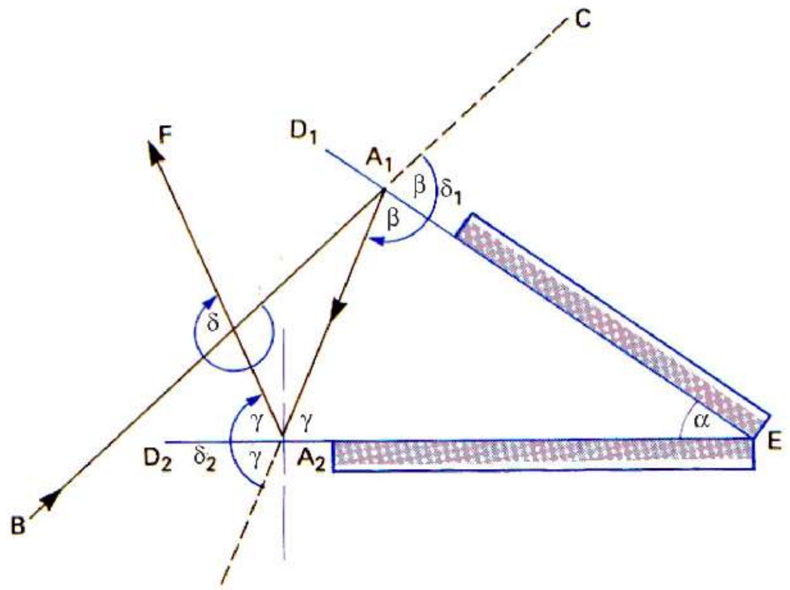


***Figura 34**. Deviazione della luce per riflessione su due specchi.*

Poiché l'angolo di incidenza è uguale all'angolo di riflessione per entrambe le riflessioni, δ_1 è uguale a 2β e δ_2 è uguale a 2γ, come è mostrato nella figura. Questi sono gli angoli del triangolo A_1A_2E, che contiene anche α, l'angolo tra i due specchi. Poiché la somma degli angoli interni di un triangolo è 180° si ha

$$\beta + \gamma = 180° - \alpha$$

Abbiamo quindi

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 = 2\beta + 2\gamma = 2(180° - \alpha) = -2\alpha \qquad (12)$$

In questa espressione non appare l'angolo di incidenza, e la deviazione totale dipende solo da α, l'angolo tra i due specchi. Poiché questo angolo è normalmente mantenuto fisso, come avviene per esempio se gli specchi sono le facce interne di un prisma, piccoli errori nel montaggio del prisma non incidono sulla deviazione totale.

Il fatto che la deviazione della luce riflessa da una combinazione di

due specchi non dipende dall'angolo di incidenza permette di realizzare il **retroriflettore** o **catarifrangente**. E' costituito da tre specchi disposti ortogonalmente tra loro come le facce di un cubo con l'apertura esposta alla luce di forma triangolare, come mostra la figura 35. La luce incidente viene rinviata indietro nella stessa direzione, qualunque sia l'angolo di incidenza. Viene utilizzato per l'avvistamento notturno delle auto o di ostacoli lungo le carreggiate stradali: la luce dei fari viene riflessa indietro dal catarifrangente che appare luminoso all'automobilista.

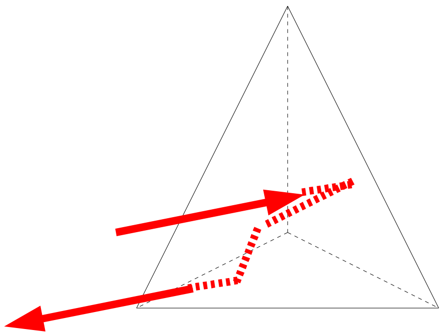


Figura 35. *Catarifrangente.*

Se un oggetto è posto tra i due specchi piani, si formano più di due immagini perché parte della luce riflessa da uno specchio può essere riflessa ancora dall'altro. Il numero di immagini che può essere visto dipende dall'angolo tra gli specchi, dalla posizione dell'oggetto e, in una certa misura, dalla posizione dell'osservatore.

La posizione di tutte le immagini può essere determinata trovando prima le immagini che si formano per riflessione diretta, e considerando poi queste immagini come oggetti se esse si trovano davanti a uno degli specchi. Nella figura 36:

- la luce proveniente da un punto luminoso B è riflessa dallo specchio D_1E producendo l'immagine B'_1 dietro lo specchio alla stessa distanza dell'oggetto che vi sta davanti;
- questa immagine è davanti allo specchio D_2E e parte della luce che proviene da essa è riflessa da D_2E per formare l'immagine $B'_{1.2}$ dietro questo specchio alla stessa distanza a cui si trova B'_1 davanti ad esso;
- allo stesso modo, la luce proveniente da B che si riflette prima sullo specchio D_2B forma l'immagine B'_2 e questa è poi riflessa da D_1E per formare l'immagine $B'_{2.1}$.

Poiché sia $B'_{1.2}$ che $B'_{2.1}$ sono dietro entrambi gli specchi, non si formano altre immagini. L'oggetto e tutte le immagini giacciono su una circonferenza con centro in E, l'intersezione dei due specchi. Nella figura 36 è mostrato il percorso della luce mediante la quale l'osservatore posto in O vede l'immagine in $B'_{1.2}$.

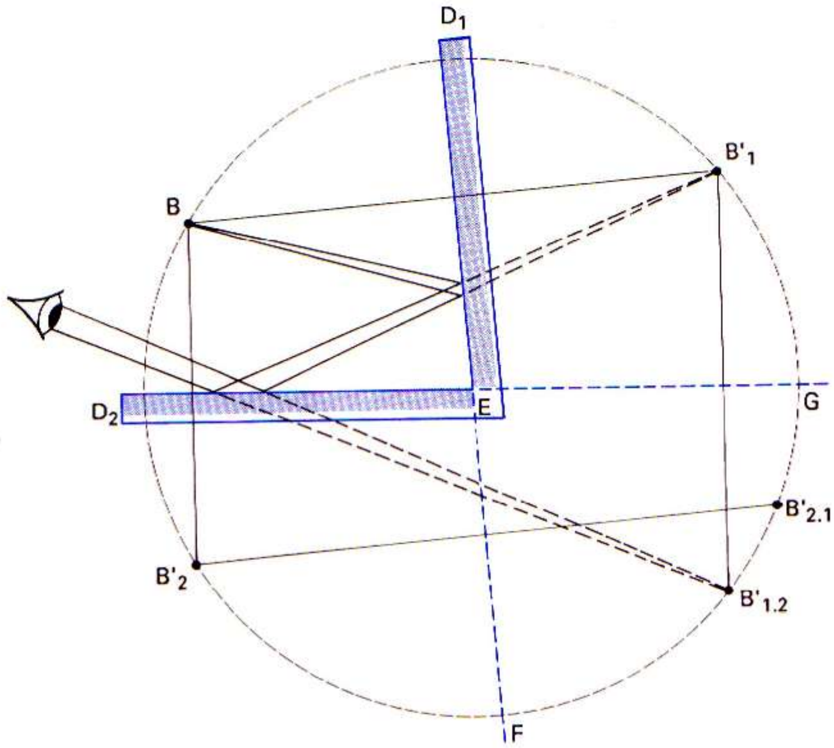


***Figura 36**. Immagini multiple formate per riflessione da due specchi.*

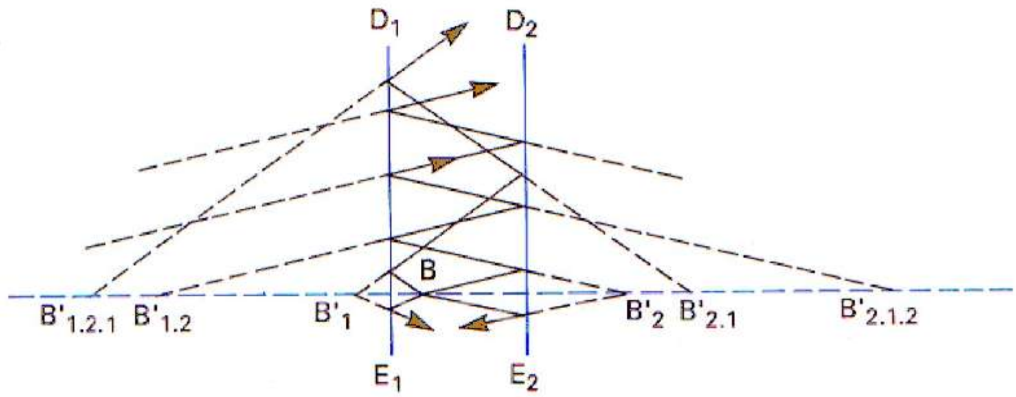


***Figura 37**. Immagini multiple con specchi paralleli.*

Quando l'angolo α tra gli specchi si riduce, normalmente il numero di immagini aumenta. Per esempio, se l'angolo α nella figura 36 diviene esattamente 90°, allora le immagini $B'_{1.2}$ e $B'_{2.1}$ coincidono dando tre immagini, più l'oggetto, disposte simmetricamente intorno alla circonferenza. Se però l'angolo è ridotto a 60°, possono essere viste cinque immagini oltre all'oggetto. Si tratta della disposizione utilizzata nel caleidoscopio. Con un angolo di 45° possono essere viste sette immagini oltre all'oggetto. Per quei valori di α che sono sottomultipli esatti di 180° il numero di immagini più l'oggetto è dato a $2(180°/\alpha)$. Ad angoli intermedi il numero di immagini viste dipende dalle posizioni dell'oggetto e dell'occhio. Quando l'angolo α diviene molto piccolo, il numero di immagini aumenta rapidamente. Nel caso in cui α è zero e gli specchi sono paralleli l'uno all'altro, il numero di immagini è teoricamente infinito ma, poiché parte della luce è persa ad ogni riflessione, le immagini più distanti mostrate nella figura 37 divengono progressivamente più deboli.

Esercitazione n.2: un po' di matematica

Arrivati a questo punto, per proseguire lo studio dell'Ottica è proprio necessario introdurre alcuni concetti matematici nuovi, anticipando un poco alcuni argomenti che verranno poi studiati in dettaglio nei corsi di matematica dei prossimi anni. E' necessario, infatti, familiarizzarsi con le misure degli angoli e con alcune funzioni matematiche che si riferiscono appunto alla misura degli angoli.

Poiché agli studenti di Ottica viene richiesto anche di saper risolvere semplici esercizi numerici, uno strumento essenziale è la calcolatrice tascabile. Non è sufficiente una semplice calcolatrice aritmetica: è necessario disporre di una **calcolatrice scientifica** che permetta di calcolare logaritmi, esponenziali e funzioni goniometriche.

Le pagine che seguono illustrano in modo essenziale alcune delle funzioni della calcolatrice scientifica. Serviranno anche come introduzione alle funzioni matematiche che dovremo conoscere per proseguire lo studio dell'Ottica.

Le funzioni della calcolatrice scientifica

Esistono molti modelli di calcolatrici scientifiche. Ognuna di esse ha qualche particolarità ed è venduta con un manuale di istruzioni che ne spiega il funzionamento. Ci sono in ogni modo delle caratteristiche comuni e perciò che illustreremo senza far riferimento a un particolare modello.

Utilizzando un computer si ha sempre a portata di mano una calcolatrice scientifica. Per attivarla, se si utilizza un computer con sistema operativo Windows, si clicca con il mouse sul pulsante “Start” della barra delle applicazioni, quindi si passa su “Programmi”, “Accessori” e infine “Calcolatrice”.

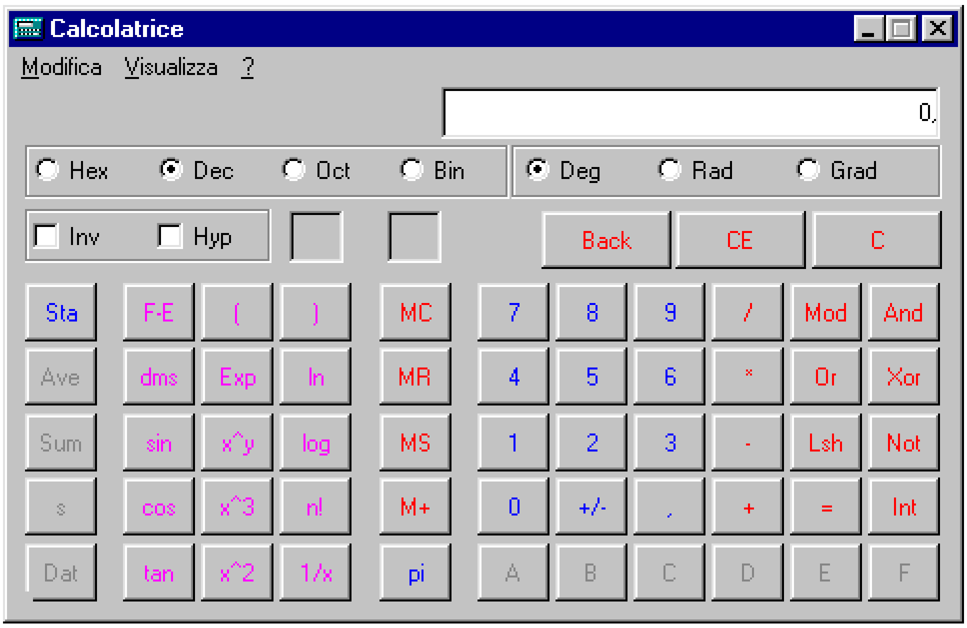
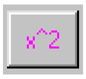


Figura 38*. La calcolatrice scientifica di Windows*.

Apparirà sullo schermo una calcolatrice. Nel caso si tratti di una semplice calcolatrice aritmetica, con le quattro operazioni e la radice quadrata, si può passare al menù "Visualizza" e al comando "Scientifica": si avrà allora una calcolatrice scientifica come quella mostrata nella figura 38. Il suo funzionamento è simile a quello di ogni normale calcolatrice tascabile.

Un concetto matematico con cui è necessario familiarizzarsi è quello di **funzione**. Per ora possiamo limitarci a considerare una funzione (che indichiamo con f) come una relazione tra due insiemi X e Y di numeri, che fa corrispondere a ogni elemento del primo insieme X (che chiamiamo "variabile indipendente" e indichiamo con x) uno e un solo elemento del secondo insieme Y (che chiamiamo "variabile dipendente" e indichiamo con $y = f(x)$). Per esempio,

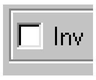
$y = x^2$



è la funzione "elevamento al quadrato", che fa corrispondere a ciascun numero x il suo quadrato x^2. Dopo aver acceso la calcolatrice, si prema per esempio il pulsante "6" e quindi il pulsante "x^2" (sulla calcolatrice di Windows, il pulsante "x^2"): sullo schermo della calcolatrice appare il numero 36, che è il quadrato di 6.

Funzioni inverse

A ogni funzione biunivoca $y = f(x)$ tra un primo insieme X e un secondo insieme Y può essere associata una **funzione inversa**, ossia una funzione (che spesso è indicata con il simbolo f^{-1}) tra il secondo insieme Y e il primo insieme X, tale che a ogni elemento y di Y corrisponde quell'elemento di x per cui $y = f(x)$. La funzione inversa dell'elevamento al quadrato, per esempio, è la radice quadrata: al numero 36, la funzione "radice quadrata" fa corrispondere il numero 6 che è proprio quel numero



che elevato al quadrato dà 36. La calcolatrice di Windows ha una casella "Inv". Si scriva un numero, per esempio 36; quindi si attivi la casella "Inv", e si selezioni quindi "x^2": si ottiene 6, che è la radice quadrata di 36. Selezionando la casella "Inv" prima di una qualsiasi funzione, la calcolatrice di Windows calcola la corrispondente funzione inversa.

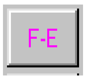
Tutte le calcolatrici scientifiche hanno, nello spazio sopra i tasti corrispondenti alle funzioni, l'indicazione di un'altra funzione. Vi è anche un tasto speciale, spesso individuato dalla scritta "2nd", che attiva, se premuto prima del tasto della funzione, questa seconda funzione. Ad alcune funzioni corrisponde in questo modo la relativa funzione inversa, e a volte questo è indicato esplicitamente: sopra la funzione "sin" si trova spesso "$\sin^{-1}$", sopra "cos" si trova spesso "$\cos^{-1}$", e sopra "log" si trova "10^x". In tutti questi casi si tratta delle corrispondenti funzioni inverse e quindi l'effetto del tasto "2nd" della calcolatrice è analogo a quello della casella "Inv" della calcolatrice di Windows. Ma attenzione, non sempre è così! Spesso nelle calcolatrici scientifiche sopra "x^2" si trova "x^{-1}", che non è la funzione inversa, cioè la radice quadrata (per la quale vi è un tasto apposito), ma il reciproco di x, ossia $1/x$! E lo stesso può avvenire per altri tasti della calcolatrice!

Non sempre è possibile calcolare il valore di una funzione. Nel caso

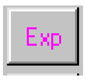
per esempio di un numero negativo non è definita la radice quadrata. Si inserisca per esempio il numero –9 nella calcolatrice (attenzione: si deve premere prima il tasto “9”, poi il tasto “+/-“; premendo il tasto “-“ e poi il tasto “9” il risultato sarebbe di sottrarre 9 al numero precedentemente memorizzato dalla calcolatrice!). Si prema poi il tasto “√” che calcola la radice quadrata: il risultato sarà una scritta “Err” o qualcosa del genere.

La notazione scientifica

La calcolatrice scientifica permette di eseguire calcoli con numeri molto piccoli o molto grandi. Per questo spesso i numeri sono visualizzati utilizzando la notazione in potenze di 10, detta anche notazione “scientifica” o “esponenziale”. Si inserisca un numero qualsiasi, per esempio 9, quindi si prema più volte il tasto “x^2”: si otterrà prima 81, poi 6.561, poi 43.046.721, e infine 1.8530201E15 o qualche cosa del genere. La calcolatrice passa automaticamente alla notazione esponenziale, rappresentando in questo modo il numero $1{,}8530201 \times 10^{15}$. Normalmente possono essere rappresentati numeri con valore assoluto compreso tra 1×10^{-99} e $9{,}9999999 \times 10^{99}$. Numeri più piccoli sono ridotti a zero, e numeri più grandi danno luogo a un errore (la calcolatrice di Windows può lavorare con numeri molto più grandi o molto più piccoli di questi, e può rappresentare fino a 32 cifre decimali).



Il tasto “F→E” permette di passare dalla normale notazione decimale (detta anche “in virgola mobile”) alla notazione esponenziale. Si esegua una qualsiasi operazione, per esempio 2+1: sullo schermo appare “3”. Premendo il tasto “F→E” si passa alla notazione esponenziale: “3E00”, che significa 3×10^0. Premendo nuovamente “F→E” si torna alla notazione “in virgola mobile”: “3”. Se poi è necessario inserire nella calcolatrice un numero molto grande, o molto piccolo, come per esempio $1{,}2 \times 10^{-14}$, si

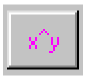


procede in questo modo: si inserisce “1,2”, quindi si preme il pulsante “Exp” (lo schermo assume l’aspetto corrispondente alla notazione esponenziale: “1,2E00”), si inserisce il valore dell’esponente, “14”, e infine, poiché si tratta di un esponente negativo, si seleziona il pulsante “+/-“; si ottiene allora “1.2E-14”.

Perché la normale rappresentazione dei numeri decimali si dice “in virgola mobile”? Perché la virgola, nel caso ci sia, può apparire in una posizione qualsiasi sullo schermo. Nel caso in cui venga rappresentato sullo schermo un altro numero con cifre decimali, la nuova virgola non si trova, in generale, nella stessa posizione di quella del numero precedente: 3 è rappresentato come “3”, 1,2 come “1.2”, 5,27 come “5.27” (si noti che è normalmente utilizzata la convenzione anglosassone di separare le cifre decimali con un punto e di usare la virgola per indicare le migliaia, ecc., al contrario di come siamo soliti fare in Italia).

A volte può essere però utile visualizzare un numero fisso di cifre decimali: si può allora passare alla notazione “in virgola fissa”. Si selezioni il tasto “TAB” e quindi il tasto corrispondente al numero di cifre decimali desiderato, per esempio 2: da questo momento in poi tutti i numeri saranno rappresentati con due cifre decimali. Se inseriamo il numero 1, sullo schermo apparirà “1.00”; se inseriamo 3,2, apparirà “3.20”; se inseriamo

4,6578, sullo schermo apparirà "4.66": se infatti la prima cifra decimale da troncare è uguale o maggiore di 5, il numero è approssimato per eccesso. Per tornare alla notazione in "virgola mobile", basta premere il tasto "TAB" e quindi il tasto "." (punto decimale).



Accanto al tasto "x^2", ogni calcolatrice scientifica ha un tasto "y^x", che permette di elevare un numero a una potenza qualsiasi. Si prema per esempio questa sequenza di tasti: "3", "y^x", "4", "=": si ottiene 81, cioè 3^4. Come funzione inversa di "y^x", la calcolatrice calcola $y^{1/x}$ (se x è un numero intero, si tratta della radice n-esima di y). Con il numero 81 sul visore della calcolatrice, si prema in sequenza "2nd", "y^x", "4" e "=": si otterrà 3, cioè la radice quarta di 81.

Passiamo allora alla definizione di alcune delle funzioni che ci interessano per lo studio dell'Ottica.

Le funzioni goniometriche

La calcolatrice scientifica ha tre tasti che recano le diciture "sin", "cos" e "tan". Vediamo qual è la loro funzione.

Consideriamo in un piano cartesiano xy una circonferenza di raggio r = 1 con centro nell'origine O, come mostra la figura 39. Tracciamo un raggio OB che formi un angolo α con l'asse delle ascisse. Indichiamo con A l'intersezione della circonferenza con l'asse delle ascisse, con B_x la proiezione di B sull'asse delle ascisse, con B_y la proiezione di B sull'asse delle ordinate, e con C l'intersezione della tangente alla circonferenza in A con il prolungamento del raggio OB. La circonferenza così costruita si dice "circonferenza goniometrica". Definiamo quindi le seguenti **funzioni goniometriche**:

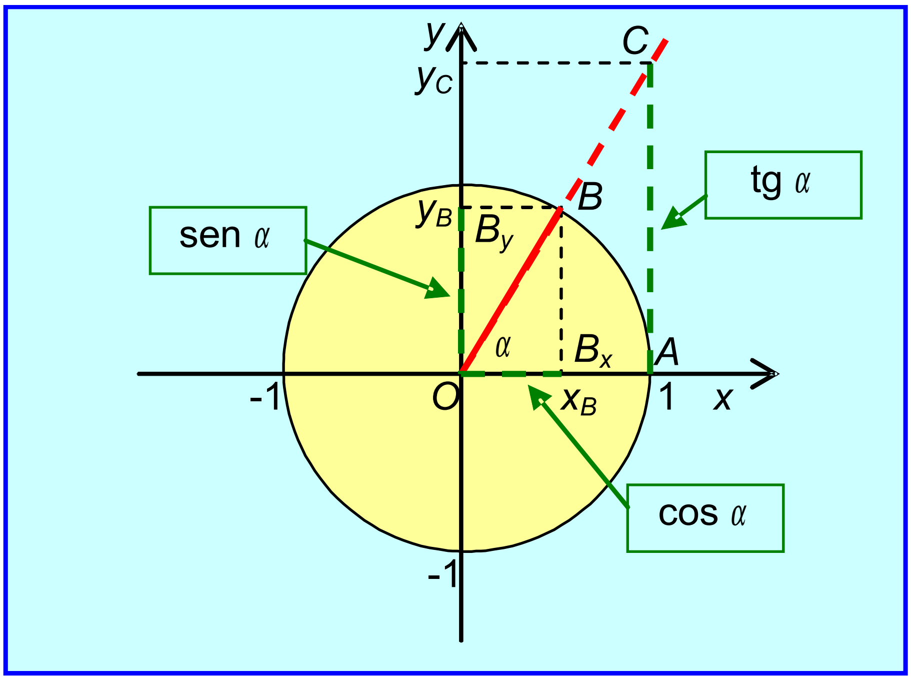
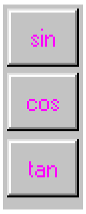


Figura 39*. La circonferenza goniometrica.*

- si dice **seno** dell'angolo α (e si indica con "sen α" in italiano e con "sin α" in inglese) l'ordinata y_B del punto *B*;

- si dice **coseno** dell'angolo α (e si indica con "cos α") l'ascissa x_B del punto *B*;

- si dice **tangente** dell'angolo α (e si indica con "tg α" in italiano e con "tan α" in inglese) l'ordinata y_C del punto *C*.



Risulta immediato verificare, osservando la circonferenza goniometrica, che per un angolo nullo (α = 0), ossia per un raggio *OB* coincidente con l'asse delle ascisse, si deve avere sen 0 = 0, cos 0 = 1 e tg 0 = 0. Possiamo verificarlo anche con la nostra calcolatrice, premendo i tasti "sin", "cos" e "tan" dopo aver immesso il valore "0". Ma per esaminare i valori delle funzioni seno, coseno e tangente per angoli diversi da zero occorre mettersi d'accordo sulle modo di misurare l'ampiezza degli angoli.

La misura degli angoli

Normalmente siamo soliti misurare gli angoli in **gradi sessagesimali** (cosi chiamati perché un grado si divide in 60 primi, e un primo in 60 secondi: 1° = 60'; 1' = 60"): un angolo retto ha un'ampiezza di 90°, un angolo piatto di 180°, e un angolo giro di 360°. In matematica, però, l'ampiezza degli angoli si misura spesso in **radianti**: con questa unità di misura, un angolo giro misura 2π = 6,2831… (come la circonferenza di un cerchio di raggio *r* = 1), e quindi un angolo piatto misura π = 3,1415… e un angolo retto $\pi/2$ = 1,5707… Esiste, anche se usato raramente, un terzo modo per misurare l'ampiezza degli angoli, nel quale l'angolo retto è diviso in 100 **gradi centesimali**. Si usa parlare anche di **gradi sessadecimali**: un angolo giro è ancora formato da 360°, come nel caso degli angoli sessagesimali, ma le frazioni di grado sono decimali. Un esempio: 37° 30': gradi sessagesimali; 37,5°: la misura dello stesso angolo in gradi sessadecimali.



La calcolatrice scientifica può essere impostata per lavorare con gli angoli in tre modi diversi. Al momento dell'accensione compare in un bordo o in un angolo dello schermo, in piccolo, una scritta come "DEG", "RAD" o "GRAD": significa che la calcolatrice è impostata per lavorare rispettivamente con gradi sessadecimali ("DEG", dall'inglese "degree"), radianti ("RAD") o gradi centesimali ("GRAD").

Nelle calcolatrici tascabili l tasto con scritto "DRG" (o qualcosa di simile) permette di cambiare l'impostazione per la misura degli angoli. A seconda del modo che è stato impostato, possono apparire sul visore le scritte "D" o "DEG", "R" o "RAD" e "G" o "GRAD". Attenzione a non confondere i normali gradi sessadecimali ("DEG") con i gradi centesimali ("GRAD"): si rischiano grossolani errori!

Il valore delle funzioni goniometriche di alcuni angoli notevoli

Vediamo quindi di calcolare il valore delle funzioni goniometriche per

alcuni particolari angoli. Prima però verifichiamo che la nostra calcolatrice sia impostata su "DEG", ossia sui gradi sessadecimali.

Osservando la circonferenza goniometrica appare subito che per l'angolo retto, ossia quando il raggio *OB* è diretto come l'asse delle ordinate, il valore del seno deve essere 1 e il valore del coseno deve essere 0. Si inserisca 90 nella calcolatrice, si prema poi il tasto "sin", e si otterrà 1: sen 90° = 1. Se invece, dopo aver inserito 90 nella calcolatrice, si preme il tasto "cos", si ottiene 0: cos 90° = 0. Che cosa succede se, dopo aver inserito 90 nella calcolatrice, si preme il tasto "tan"? Compare un segnale di errore: infatti per α = 90° la funzione tg α non è definita. Il prolungamento del raggio *OB* è l'asse delle ordinate *y*, che è parallelo alla tangente alla circonferenza goniometrica in *A*: non c'è quindi nessun punto di intersezione tra queste due rette. Potremmo anche dire, con un linguaggio non del tutto preciso dal punto di vista matematico, che le due rette si incontrano "all'infinito", e che quindi tg 90° = ∞ (il simbolo ∞ è utilizzato in matematica per indicare l'infinito).

Consideriamo ora un angolo di 45°. La figura 40 mostra un ingrandimento della circonferenza goniometrica, con appunto α = 45°. È evidente che il triangolo rettangolo OB_xB ha i due cateti uguali: $OB_x = B_xB$. Poiché il raggio del cerchio è pari a 1, OB = 1, per il teorema di Pitagora abbiamo

$$OB_x^2 + B_xB^2 = 2OB_x^2 = OB^2 = 1$$

e quindi

$$OB_x^2 = ½, \quad OB_x = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071...$$

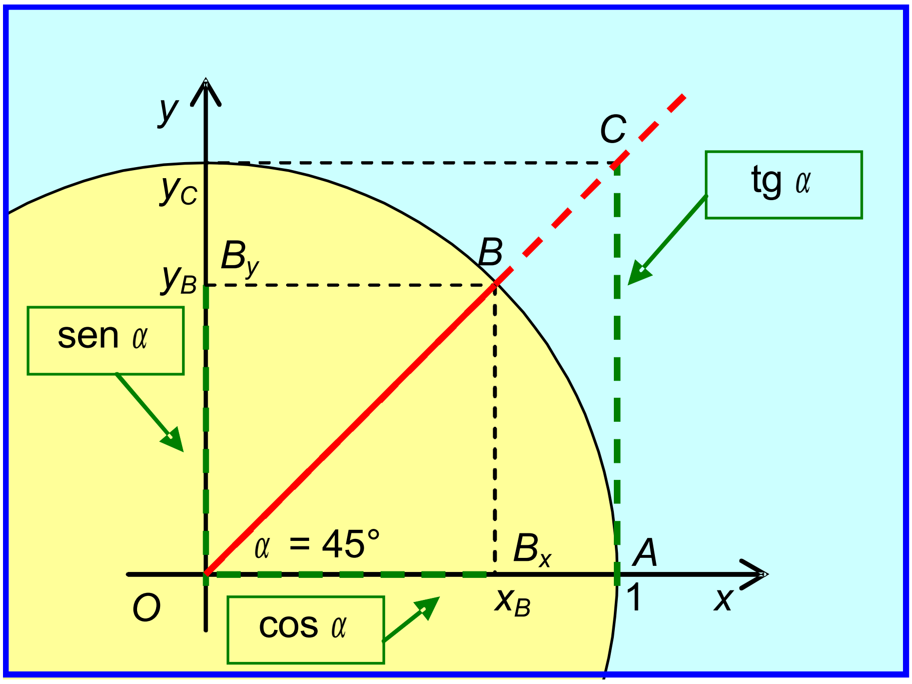


Figura 40. *Le funzioni goniometriche di 45°.*

Si ha allora cos 45° = 0,7071… e, poiché i due cateti del triangolo rettangolo sono uguali, sen 45° = 0,7071… Possiamo verificarlo immediatamente inserendo 45 nella calcolatrice e premendo i tasti “sin” e “cos”. La tangente di 45° corrisponde invece al segmento *AC*, che vale nel nostro caso 1 perché $OACC_y$ è un quadrato di lato 1. Si ha quindi tg 45° = 1.

Consideriamo ancora il triangolo OB_xB: poiché l’ipotenusa *OB* misura 1, possiamo scrivere le seguenti relazioni:

$$\operatorname{sen}\alpha = OB_y = B_xB = \frac{B_xB}{OB} \quad \text{e} \quad \cos\alpha = OB_x = \frac{OB_x}{OB}.$$

Inoltre, poiché il triangolo *OAC* è simile al triangolo OB_xB, possiamo scrivere anche

$$\operatorname{tg}\alpha = AC = \frac{AC}{OA} = \frac{B_xB}{OB_x}.$$

Queste relazioni valgono per qualunque triangolo e possono essere espresse, facendo riferimento alla figura 41, in questo modo: in un triangolo rettangolo *ACB*

- il seno di un angolo acuto α è uguale al rapporto tra il cateto *a* opposto all’angolo e l’ipotenusa *c*;
- il coseno di un angolo acuto α è uguale al rapporto tra il cateto *b* adiacente all’angolo e l’ipotenusa *c*;
- la tangente di un angolo acuto α è uguale al rapporto tra il cateto *a* opposto all’angolo e il cateto *b* adiacente stesso.

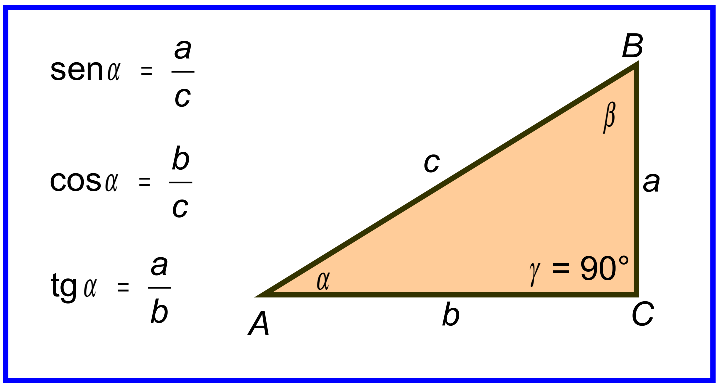


Figura 41. *Gli elementi del triangolo rettangolo.*

Si ricavano allora anche in modo immediato le seguenti importanti relazioni tra le funzioni goniometriche:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \; ; \quad \text{infatti} \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{a/c}{b/c} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \; ;$$

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; infatti $\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = 1$;

$\cos\alpha = \text{sen}\,(90° - \alpha)$; $\text{sen}\,\alpha = \cos\,(90° - \alpha)$.

Queste relazioni risultano utili per ricavare il valore delle funzioni goniometriche di particolari angoli. Consideriamo per esempio $\alpha = 60°$ (figura 42). Il triangolo rettangolo *ACB* è in questo caso una metà del triangolo equilatero *AA'B*. L'ipotenusa *c* misura quindi il doppio del cateto *b* adiacente all'angolo α: $c = 2b$. Si ha quindi cos 60° = b/c = 0,5. Per il teorema di Pitagora abbiamo poi

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(2b)^2 - b^2} = \sqrt{3}b$$

da cui si ricava:

sen 60° = a/c = $\sqrt{3}/2$ = 0,8660...

tg 60° = a/b = $\sqrt{3}$ = 1,7320...

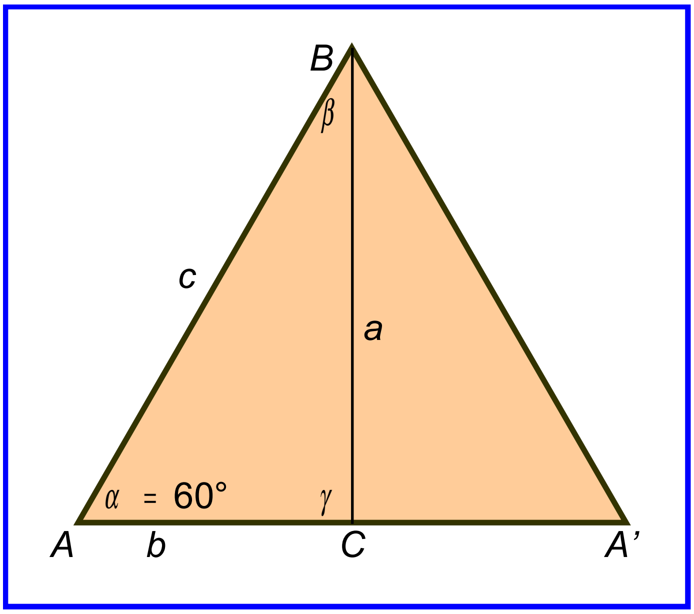


***Figura 42**. Le funzioni goniometriche di 30° e 60°.*

mentre per $\alpha = 30°$ si ha:

sen 30° = cos (90° - 30°) = cos 60° = 0,5

cos 30° = sen (90° - 30°) = sen 60° = $\sqrt{3}/2$ = 0,8660...

$$\text{tg}\,30° = \frac{\text{sen}\,30°}{\cos 30°} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = 0{,}5773...$$

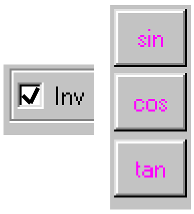
Si hanno quindi i valori indicati nella tabella 8.

Tabella 8. Valori delle funzioni goniometriche di angoli notevoli.

α (gradi)	α (rad)	sen α	cos α	tg α
0°	0	0	1	0
30°	$\pi/6$	0,5	$\sqrt{3}/2$ = **0,8660…**	$\sqrt{3}/3$ = **0,5773…**
45°	$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$ = **0,7071…**	$\sqrt{2}/2$ = **0,7071…**	1
60°	$\pi/3$	$\sqrt{3}/2$ = **0,8660…**	0,5	$\sqrt{3}$ = **1,7320…**
90°	$\pi/2$	1	0	∞

Ci si può ora esercitare utilizzando la calcolatrice per trovare i valori delle funzioni goniometriche di angoli qualsiasi.

Le funzioni goniometriche inverse



Consideriamo infine le **funzioni goniometriche inverse**. Si provi a inserire nella calcolatrice il numero 0,5 e premere il tasto indicato con "$\sin^{-1}$" (ossia, la sequenza di tasti "2nd" e "sin"): si otterrà 30, ossia l'ampiezza (in gradi) di quell'angolo il cui seno vale 0,5. Le funzioni "$\sin^{-1}$", "$\cos^{-1}$" e "$\tan^{-1}$" della calcolatrice sono quindi le funzioni inverse rispettivamente delle funzioni goniometriche seno, coseno e tangente. In matematica prendono rispettivamente il nome di: **arcoseno** (y = arcsen x) la funzione inversa del seno; **arcocoseno** (y = arccos x) la funzione inversa del coseno; e **arcotangente** (y = arctg x) la funzione inversa della tangente.

Vediamo un esempio del loro uso. Consideriamo un triangolo rettangolo i cui cateti a e b misurino, rispettivamente, a = 3,78 cm e b = 2,56 cm. Ci chiediamo quale sia l'ampiezza dell'angolo acuto α adiacente al cateto a. La tangente di α vale tg α = a/b = 3,78 / 2,56 = 1,4765625. L'ampiezza dell'angolo α sarà dunque data da α = arctg 1,4765625. Premendo la sequenza di tasti "2nd" e "tan" sulla nostra calcolatrice otteniamo α = 55,892230… (se la calcolatrice era impostata su "DEG", ossia sui gradi sessadecimali). Se poi vogliamo esprimere l'ampiezza di questo angolo in gradi sessagesimali, ossia in gradi, minuti e secondi, come si usa fare correttamente, possiamo premere il tasto "D.M.S" della calcolatrice per ottenere "55.533203", ossia α = 55° 53' 32,03".



9. L'indice di rifrazione

Quando un raggio di luce entra in un nuovo mezzo, normalmente la sua direzione cambia. Questa apparente rottura del percorso del raggio è chiamata **rifrazione**, dal termine latino che significa "frattura".

Le leggi della rifrazione sono un poco più complesse delle leggi della riflessione. Per formularle è necessario introdurre un nuovo concetto, quello di **indice di rifrazione**. La luce si propaga nel vuoto con una velocità che viene indicata con il simbolo c ed è uguale esattamente a 299.792.458 m/s. In ogni mezzo materiale trasparente la luce si propaga con una velocità v inferiore a c. **L'indice di rifrazione assoluto *n* di un materiale è definito come il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto e la velocità della luce nel materiale**:

$$n = \frac{c}{v} \qquad (13)$$

La tabella 9 riporta gli indici di rifrazione di alcune sostanze, riferiti alla luce gialla emessa da una lampada al sodio (come vedremo più avanti, gli indici di rifrazione dipendono leggermente dalla lunghezza d'onda della luce).

Dati poi due diversi mezzi trasparenti e indicate con v_1 e v_2 le velocità con cui la luce si propaga al loro interno, **l'indice di rifrazione relativo n_{21} tra i due mezzi è definito come il rapporto tra le velocità di propagazione della luce nei due mezzi**:

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} \qquad (14)$$

Tabella 9. Indici di rifrazione assoluti (per la luce gialla del sodio alla lunghezza d'onda di 589 nm).

Sostanza (*: a 1 atm e 0 °C)	**Indice di rifrazione**	**Sostanza**	**Indice di rifrazione**
Idrogeno *	1,000139	Plexiglas	1,487
Aria *	1,000293	Toluolo	1,4954
Anidride carbonica *	1,000450	Benzolo	1,5014
Kerosene	1,20	Cloruro di sodio	1,5447
Olio	1,30	Ambra	1,546
Ghiaccio	1,3093	Polistirene	1,55
Fluoruro di magnesio	1,33	Bisolfuro di carbonio	1,627
Acqua (a 20 °C)	1,3333	Zaffiro	1,77
Acqua di mare	1,3404	Diamante	2,4185
Acetone	1,359	Vetro crown borosilicato	da 1,47 a 1,50
Alcool etilico	1,3634	Vetro crown normale	da 1,50 a 1,53
Fluorite	1,434	Vetro crown al bario	da 1,53 a 1,59
Quarzo fuso	1,4588	Vetro flint normale	da 1,59 a 1,66
Glicerina	1,47	Vetro flint pesante	da 1,66 a 1,95

L'indice di rifrazione relativo può essere calcolato anche mediante il rapporto tra gli indici di rifrazione assoluti delle due sostanze. Si ha infatti

$$n_{21} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{v_1}{c}\frac{c}{v_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (15)$$

Dalla formula che definisce l'indice di rifrazione relativo tra due mezzi si ricava anche che **l'indice di rifrazione relativo al passaggio della luce dal primo al secondo è uguale all'inverso dell'indice di rifrazione relativo al passaggio dal secondo al primo**:

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{n_{21}} \qquad (16)$$

Consideriamo per esempio acqua (indice di rifrazione assoluto n_{acqua} = 1,3333) e diamante (indice di rifrazione assoluto $n_{diamante}$ = 2,4185). L'indice di rifrazione relativo del diamante rispetto all'acqua è dato da:

$$n_{21} = \frac{n_{diamante}}{n_{acqua}} = \frac{2{,}4185}{1{,}3333} = 1{,}8139$$

L'indice di rifrazione relativo dall'acqua rispetto al diamante è invece

$$n_{12} = \frac{n_{acqua}}{n_{diamante}} = \frac{1{,}3333}{2{,}4185} = 0{,}55130 = \frac{1}{1{,}8139}$$

L'indice di rifrazione assoluto dei gas come l'aria (n_{aria} = 1,000293) differisce di pochissimo dall'unità. Si può quindi, in prima approssimazione, considerare l'indice di rifrazione assoluto dell'aria uguale a 1, come per il vuoto. L'errore che si introduce in questo modo nei calcoli è molto piccolo. Per esempio, l'indice di rifrazione dell'acqua rispetto all'aria è pari a:

$$n_{21} = \frac{n_{acqua}}{n_{aria}} = \frac{1{,}3333}{1{,}000293} = 1{,}3329$$

che differisce dall'indice di rifrazione assoluto dell'acqua solo a partire dalla quarta cifra significativa.

10. Le leggi della rifrazione

Possiamo ora enunciare le leggi che regolano la rifrazione.

Consideriamo un raggio di luce **monocromatica** *I* emesso da una sorgente *S* che, propagandosi in un mezzo 1 (per esempio aria), raggiunge con un angolo di incidenza *i* la superficie liscia di un secondo mezzo 2 (per esempio vetro), come nella figura 43.

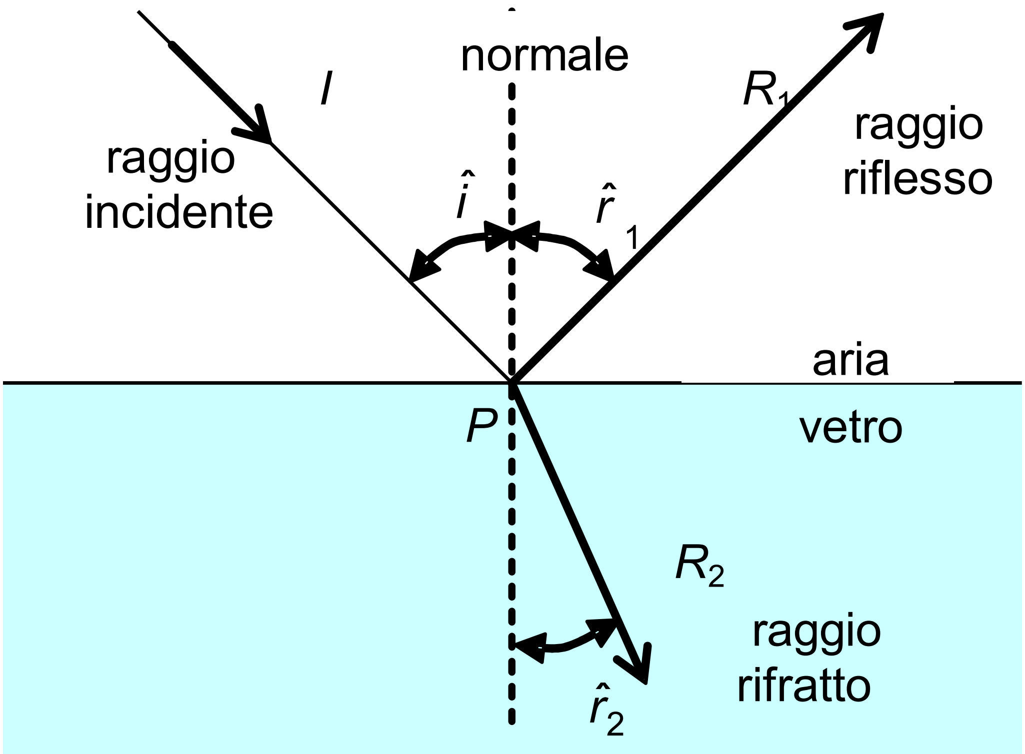


Figura 43. *Riflessione e rifrazione di un raggio luminoso attraverso la superficie di un mezzo trasparente.*

Oltre al raggio riflesso R_1 diretto con un angolo di riflessione $r_1 = -i$, si osserverà anche un raggio R_2 che si propaga all'interno del secondo mezzo e che forma con la retta normale alla superficie nel punto di incidenza un angolo r_2 minore dell'angolo di incidenza *i*. Questo raggio luminoso prende il nome di **raggio rifratto**, mentre l'angolo r_2 si dice **angolo di rifrazione**.

Le leggi della rifrazione, sono formulate in questo modo:

1° Legge della rifrazione: il raggio incidente, il raggio rifratto e la retta normale alla superficie di rifrazione nel punto di incidenza giacciono nello stesso piano.

2° Legge della rifrazione: il prodotto dell'indice di rifrazione del mezzo in cui si propaga il raggio incidente per il seno dell'angolo di incidenza è uguale al prodotto dell'indice di rifrazione del mezzo in cui si propaga il raggio rifratto per il seno dell'angolo di rifrazione:

$$n_1 \operatorname{sen} \hat{i} = n_2 \operatorname{sen} \hat{r}_2 \qquad (17)$$

Utilizzando l'indice di rifrazione relativo n_{12} tra i due mezzi, la seconda legge della rifrazione può essere espressa anche dicendo che il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza e il seno dell'angolo di rifrazione è costante ed è uguale all'indice di rifrazione relativo tra i due mezzi:

$$\frac{\operatorname{sen} \hat{i}}{\operatorname{sen} \hat{r}_2} = n_{21} \qquad (18)$$

La seconda legge della rifrazione è stata formulata nel 1621 dal matematico olandese Willebrod Snell (1591-1626) ed è perciò nota anche come **legge di Snell**.

In generale, **quando si passa da un mezzo meno denso** (come l'aria) **a un mezzo più denso** (come il vetro) **l'angolo di rifrazione è minore dell'angolo di incidenza perché l'indice di rifrazione relativo tra i due mezzi è maggiore di uno**. Si ha infatti:

$$\hat{r}_2 < \hat{i}\text{, quindi} \quad \operatorname{sen} \hat{r}_2 < \operatorname{sen} \hat{i} \quad \text{e} \quad n_{21} = \frac{\operatorname{sen} \hat{i}}{\operatorname{sen} \hat{r}_2} > 1$$

Quando si passa invece da un mezzo otticamente più denso a uno meno denso l'angolo di rifrazione è maggiore dell'angolo di incidenza perché l'indice di rifrazione relativo tra i due mezzi è minore di uno. Si ha in questo caso:

$$\hat{r}_2 > \hat{i}\text{, quindi} \quad \operatorname{sen} \hat{r}_2 > \operatorname{sen} \hat{i} \quad \text{e} \quad n_{21} = \frac{\operatorname{sen} \hat{i}}{\operatorname{sen} \hat{r}_2} < 1$$

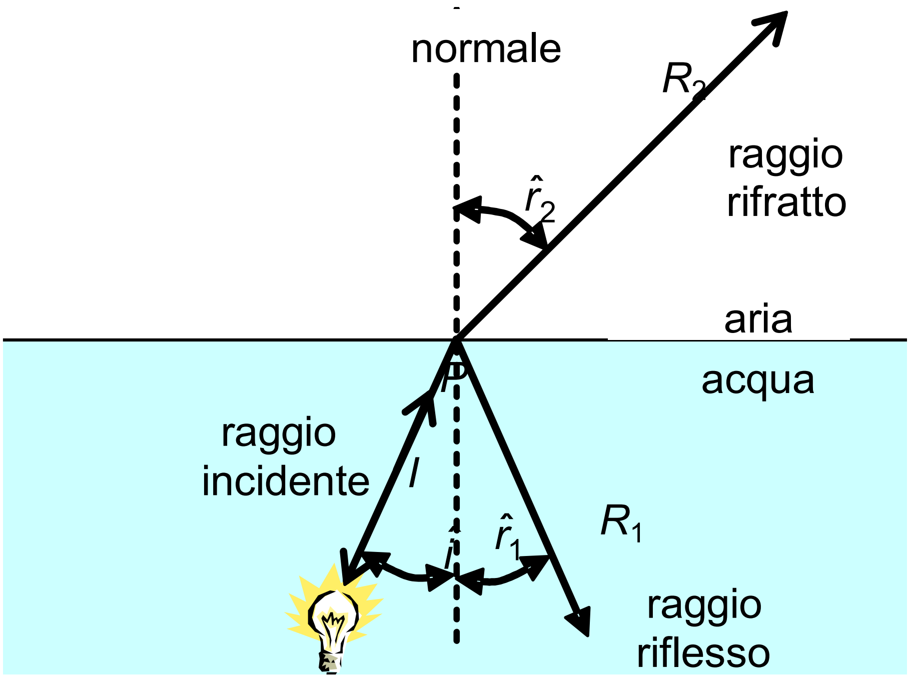


Figura 44*. La rifrazione di un raggio luminoso che passa dall'acqua all'aria.*

L'indice di rifrazione relativo dell'aria rispetto all'acqua vale per esempio 0,75: passando nell'aria i raggi luminosi emessi da una sorgente posta all'interno di una vasca piena d'acqua vengono deviati verso l'esterno e allontanati dalla verticale.

In caso di incidenza normale, quando il raggio luminoso I incide perpendicolarmente sulla superficie riflettente, anche l'angolo di rifrazione r_2 è nullo come l'angolo di riflessione r_1: il raggio rifratto prosegue nella stessa direzione del raggio incidente.

Sulle leggi della riflessione e della rifrazione si basa l'**ottica geometrica**, nella quale la luce è considerata come costituita da raggi luminosi rettilinei che vengono deviati quando incontrano superfici riflettenti o mezzi rifrangenti seguendo le leggi della riflessione e della rifrazione. L'ottica geometrica vale nella maggior parte dei casi pratici, nei quali le dimensioni dei corpi che si frappongono ai fasci di luce sono molto più grandi della lunghezza d'onda della luce e si possono quindi trascurare altri effetti dovuti alla sua natura ondulatoria.

La reversibilità dei raggi luminosi

La formula (16), per la quale l'indice di rifrazione relativo al passaggio della luce da un mezzo 1 a un mezzo 2 è uguale all'inverso dell'indice di rifrazione relativo al passaggio della luce dal mezzo 2 al mezzo 1:

$$n_{12} = \frac{1}{n_{21}} \qquad (16)$$

mostra la **reversibilità** dei raggi luminosi: **un dato cammino luminoso può indifferentemente essere pensato come percorso dalla luce nei due sensi**. Poiché un raggio luminoso passando da un mezzo 1 a un mezzo 2 subisce una rifrazione opposta a quella che subisce un raggio luminoso passando dal mezzo 2 al mezzo 1, se un raggio diretto nel mezzo 1 secondo un angolo i_1 come nella figura 45 viene rifratto passando nel mezzo 2 a un angolo r_1, allora un raggio che nel mezzo 2 è diretto secondo un angolo $i_2 = r_1$ viene rifratto passando al mezzo 1 a un angolo $r_2 = i_1$, sovrapponendosi al primo raggio luminoso. Lo stesso principio di reversibilità vale anche per altri fenomeni come la riflessione della luce.

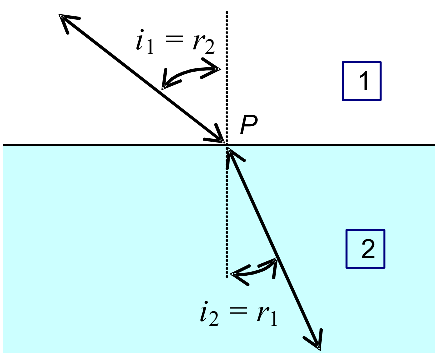


***Figura 45**. La reversibilità dei raggi luminosi.*

11. Angolo limite e riflessione totale

Supponiamo di avere una sorgente luminosa *B* posta all'interno di un mezzo con indice di rifrazione assoluto *n*, per esempio vetro, come è mostrato nella figura 46. Una parte della luce emessa da questa sorgente che raggiunge la superficie di separazione tra il vetro e l'aria nei punti *b* e *c* viene riflessa all'interno del vetro con un angolo di riflessione *r* = - *i*, un'altra parte emerge dal vetro e viene rifratta con un angolo di rifrazione *i'* maggiore dell'angolo di incidenza *i*, dato che in questo caso la luce passa da un mezzo più denso a un secondo mezzo meno denso.

Aumentando l'angolo di incidenza, si arriva al punto *d* per il quale l'angolo di rifrazione *i'* risulta uguale a 90° e il raggio rifratto è radente alla superficie di separazione tra i due mezzi. Per angoli di incidenza ancora più grandi non è più possibile avere rifrazione: non c'è raggio rifratto, e **tutta la luce incidente sulla superficie di separazione tra i due mezzi viene riflessa** (raggi *e* ed *f* della figura 46). Il fenomeno prende il nome di **riflessione totale** e l'angolo di incidenza i_c al di sopra del quale si ha riflessione totale viene detto **angolo limite**.

Indichiamo con *n* l'indice di rifrazione del primo mezzo (in questo caso il vetro) e con *n'* (*n'* < *n*) l'indice di rifrazione del secondo mezzo (in questo caso l'aria). La relazione tra l'angolo di incidenza *i* e l'angolo di rifrazione *i'* è la seconda legge della rifrazione (17):

$$n \text{ sen } i = n' \text{ sen } i' \qquad (17)$$

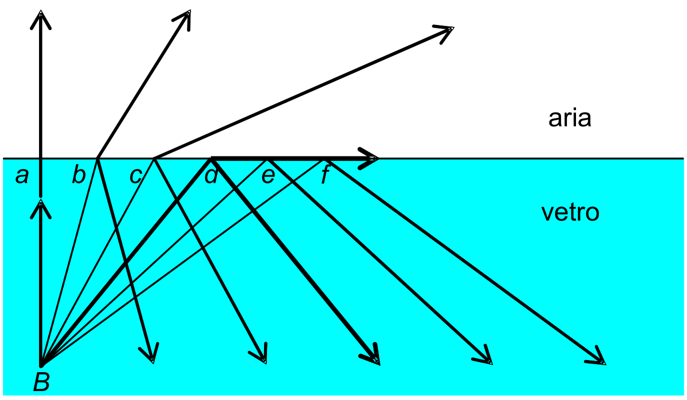


Figura 46*. La riflessione totale. I raggi di luce a, b e c emessi dalla sorgente S posta all'interno del vetro raggiungono la superficie che separa acqua e aria con un angolo di incidenza minore dell'angolo limite e danno origine a un raggio rifratto nell'aria e a un raggio riflesso nell'acqua. Il raggio d che raggiunge la superficie di separazione tra acqua e aria con un angolo di incidenza uguale all'angolo limite dà origine a un raggio rifratto tangente alla superficie di separazione tra acqua e aria e a un raggio riflesso nell'acqua. Per i raggi e e f che raggiungono la superficie di separazione tra acqua e aria con un angolo di incidenza maggiore dell'angolo limite non si ha un raggio rifratto nell'aria, ma soltanto il raggio riflesso nell'acqua.*

Possiamo esprimere l'angolo di rifrazione i' in funzione dell'angolo di incidenza i e degli indici di rifrazione come

$$\operatorname{sen} i' = \frac{n}{n'} \operatorname{sen} i \qquad (18)$$

Se l'angolo di incidenza i è piccolo, come nel caso dei raggi *a*, *b* e *c* della figura 46, la formula (18) permette di calcolare il valore dell'angolo di rifrazione i'. Quando l'angolo di incidenza i raggiunge un valore i_c tale che

$$\operatorname{sen} i_c = \frac{n'}{n} \qquad (19)$$

la relazione (18) dà sen i' = 1 e quindi i' = 90°: il raggio rifratto risulta allora radente alla superficie del vetro (raggio *d* della figura 46). Se poi l'angolo di incidenza i ha un valore maggiore di i_c, per nessun valore di i' è possibile soddisfare l'equazione (18): non c'è raggio rifratto, e si ha riflessione totale.

Nel caso per esempio della superficie di separazione tra vetro con indice di rifrazione n = 1,5 e aria con indice di rifrazione n' = 1, il valore dell'angolo limite che si ricava dalla formula (19) è

$$i_c = \operatorname{arcsen}\frac{n'}{n} = \operatorname{arcsen}\frac{1}{1{,}5} = 41^\circ 48'$$

Qualsiasi raggio luminoso che incide **dall'interno** sulla superficie del vetro con un angolo di incidenza maggiore di 42° viene quindi riflesso totalmente. In molti strumenti ottici, come binocoli o macchine fotografiche, la riflessione totale viene sfruttata per ottenere superfici totalmente riflettenti (che hanno quindi un **potere riflettente**, definito come il rapporto tra l'intensità del raggio riflesso e l'intensità del raggio incidente, del 100 per cento; con uno specchio si può ottenere nel migliore dei casi un potere riflettente del 95 per cento).

12. Alcune "illusioni ottiche"

Il fenomeno della rifrazione della luce permette di spiegare alcune "illusioni ottiche" che si presentano frequentemente. Quando osserviamo un oggetto posto in un recipiente pieno d'acqua, i raggi luminosi che esso emette vengono deviati nel passare dall'acqua all'aria, in modo che ci sembrano provenire da una direzione diversa da quella in cui si trova l'oggetto. Per questo un bastone immerso nell'acqua può sembrare spezzato, e un oggetto sul fondo di una piscina può apparire in una posizione più alta di quella in cui si trova realmente.

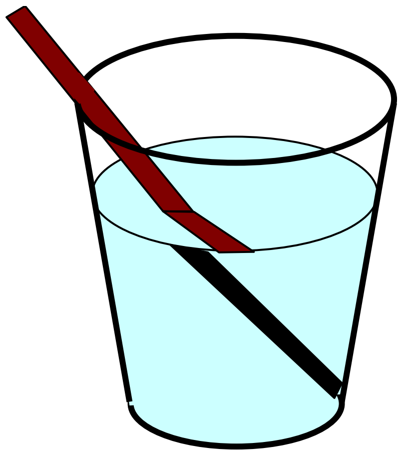


Figura 47*. Per effetto della rifrazione una bacchetta rettilinea immersa in un bicchiere contenente acqua appare piegata in corrispondenza della superficie di separazione tra l'acqua e l'aria, e spezzata in corrispondenza della linea che separa vetro, acqua e aria.*

Può avvenire, quando la luce attraversa un mezzo trasparente non omogeneo, che il raggio rifratto segua una traiettoria curvilinea. In una giornata estiva gli strati di aria immediatamente a contatto con il terreno scaldato dai raggi solari sono più caldi e quindi meno densi dell'aria sovrastante. I raggi di luce provenienti dal cielo in direzione radente al suolo vengono allora sempre più rifratti man mano che incontrano strati di aria più caldi e meno densi, e raggiungono un osservatore come se provenissero dal terreno. L'effetto è quello di un **miraggio**: una luminosità argentea nelle vicinanze dell'orizzonte, simile a quella generata da una distesa d'acqua, che si manifesta in particolare sulle strade asfaltate o sulla sabbia del deserto.

Un fenomeno analogo avviene per la luce delle stelle che penetra nell'atmosfera in direzione radente rispetto alla superficie terrestre: incontrando strati di atmosfera progressivamente più densi la luce viene deviata secondo una traiettoria curvilinea in modo che le stelle appaiono più alte sull'orizzonte di quanto non siano in realtà (figura 49). La massima deviazione si ottiene per raggi luminosi esattamente paralleli alla superficie terrestre ed è di circa mezzo grado, pari al diametro apparente del Sole: per questo, quando vediamo all'alba o al tramonto il disco solare lambire la linea dell'orizzonte, in realtà il Sole si trova al di sotto di tale linea.

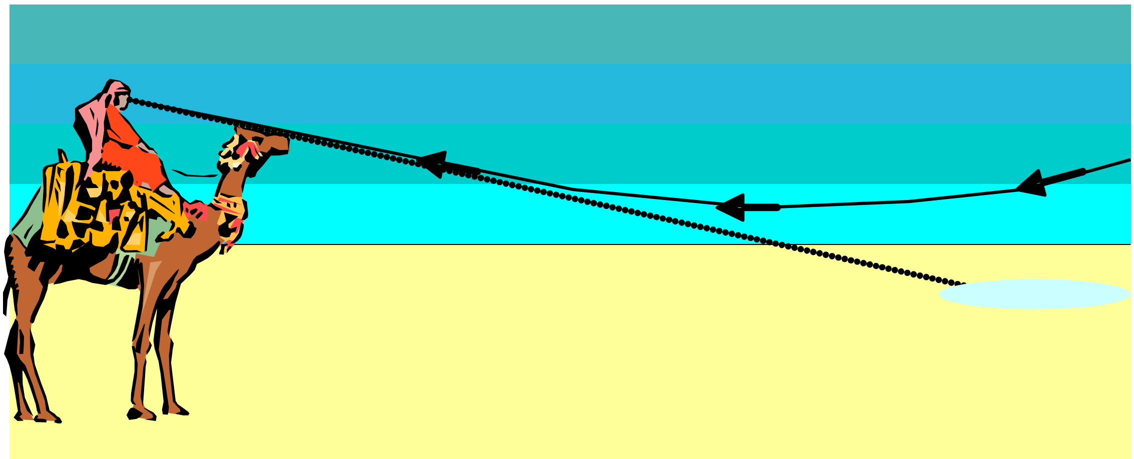


Figura 48. *Quando il suolo è molto caldo, gli strati di aria a contatto di esso sono più caldi e quindi meno densi degli strati di aria che si trovano a quote maggiori. Per effetto della rifrazione i raggi luminosi seguono un percorso curvo e si ha il fenomeno del miraggio: il colore azzurro del cielo è visto al di sotto dell'orizzonte, dando l'impressione della presenza di distese d'acqua.*

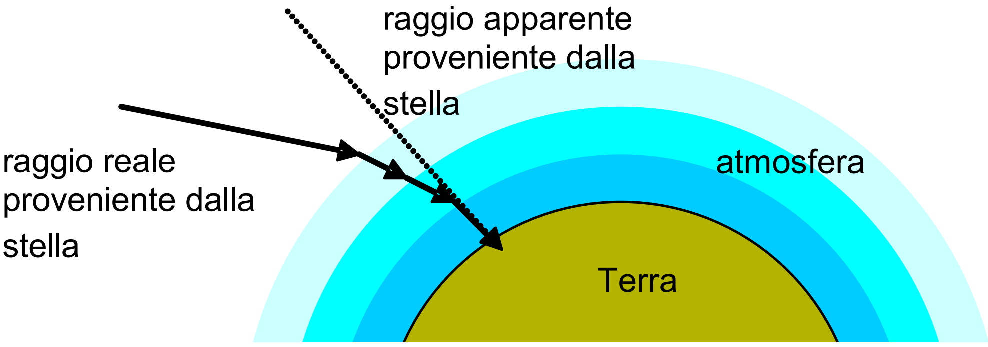


Figura 49. *Entrando nell'atmosfera, la luce delle stelle viene deviata per effetto della rifrazione, in modo che esse appaiono più alte sull'orizzonte di quanto non siano realmente.*

13. Il principio di Huygens

Nel 1687 l'olandese Christiaan Huygens formulò un principio, noto come **principio di Huygens**, che permette di spiegare i diversi fenomeni relativi alla propagazione delle onde da un punto di vista geometrico. Huygens formulò il suo principio nell'ambito della sua teoria ondulatoria della luce, di cui naturalmente non conosceva il carattere elettromagnetico. Ma poiché si tratta di un principio puramente geometrico, può essere applicato a onde di qualsiasi natura, elettromagnetica o elastica, siano esse trasversali o longitudinali.

Secondo il principio di Huygens, **la propagazione di un qualsiasi fronte d'onda può essere studiata considerando tutti i suoi punti come sorgenti di onde sferiche secondarie. Dopo un intervallo di tempo Δt la nuova posizione del fronte d'onda è data dalla superficie tangente (o inviluppo) a queste onde secondarie**.

La figura 50 mostra come si applica il principio di Huygens alla propagazione di un fronte d'onda piano *AB*. Consideriamo tutti i punti del fronte d'onda *AB* come sorgenti di onde sferiche che, in un tempo Δt, si propagano in tutte le direzioni per un tratto $v\Delta t$. L'inviluppo di queste sfere, ossia la superficie tangente a tutte queste sfere, è il nuovo fronte d'onda *CD*. Un fronte d'onda piano si propaga quindi con velocità v, mantenendosi piano.

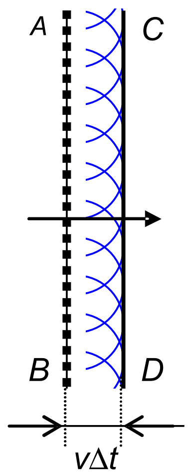


***Figura 50**. Il pricipio di Huygens applicato alla propagazione di un fronte d'onda piano.*

La figura 51 mostra invece come si applica il principio di Huygens alla propagazione di un fronte d'onda sferico *EF*. Anche in questo caso dobbiamo ipotizzare che i vari punti del fronte d'onda *EF* emettano onde sferiche, che in un intervallo di tempo Δt si propagano in tutte le direzioni per un tratto $v\Delta t$. L'inviluppo di queste sfere, ossia la superficie ad esse tangente, è il nuovo fronte d'onda *GH*. Un fronte d'onda sferico si propaga quindi con velocità v, mantenendo la forma sferica.

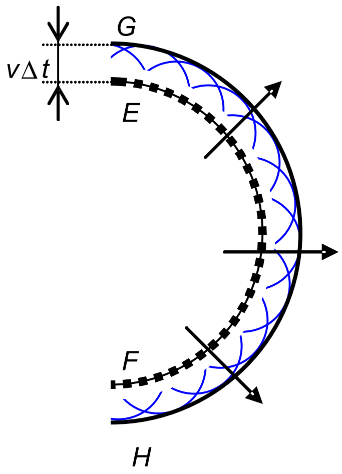


Figura 51. *Il principio di Huygens applicato alla propagazione di un fronte d'onda sferico.*

Huygens, nel formulare il suo principio, non prese in considerazione che se ogni punto del fronte d'onda fosse veramente una sorgente di un'onda sferica vi sarebbe un'emissione di onde anche in direzione contraria rispetto alla direzione di propagazione del fronte d'onda. Ciò rendeva difficoltosa la spiegazione della propagazione delle onde. Il principio di Huygens fu perfezionato prima, nel 1822, dal fisico francese Augustin Jean Fresnel (1788-1827) e quindi, nel 1882, dal tedesco Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887). Nella nuova formulazione del principio di Huygens si suppone che l'intensità delle onde sferiche secondarie dipenda dall'angolo rispetto alla direzione di propagazione dell'onda e sia nulla nella direzione contraria alla direzione di propagazione del fronte d'onda.

Il principio di Huygens permette di spiegare sia la riflessione sia la rifrazione delle onde. Consideriamo la riflessione di un fronte d'onda piano. La figura 52 mostra un fronte d'onda *AA′A″* perpendicolare ai tre raggi luminosi disegnati. Dai punti di questo fronte d'onda disegniamo le onde secondarie di Huygens. Nel tempo impiegato dall'onda secondaria emessa dal punto *A″* per raggiungere il punto *R″*, l'onda emessa da *A* ha raggiunto il punto *R* mentre l'onda emessa da *A′*, dopo aver raggiunto la superficie riflettente nel punto *B′*, viene riflessa e giunge in *R′*. Il fronte d'onda riflesso è la superficie tangente a queste onde sferiche ed è quindi *RR′R″*.

Consideriamo allora i due triangoli *AA″R″* e *ARR″*. Sono entrambi triangoli rettangoli: infatti l'angolo $A\hat{A}''R''$ è un angolo retto perché la direzione di propagazione di un'onda in ogni punto è sempre perpendicolare al fronte d'onda passante per quel punto, mentre l'angolo $A\hat{R}R''$ è retto perché è l'angolo formato dalla tangente a una circonferenza e dal raggio passante per il punto di tangenza. I due triangoli *AA″R″* e *ARR″* hanno i due lati *AR* e *A″R″* uguali perché corrispondenti alla distanza percorsa dalla luce nello stesso mezzo (e quindi con la stessa velocità) nella stesso tempo, e l'ipotenusa *AR″* in comune. Sono quindi congruenti. Perciò si ha anche

$$A''\hat{R}''A = R\hat{A}R'$$

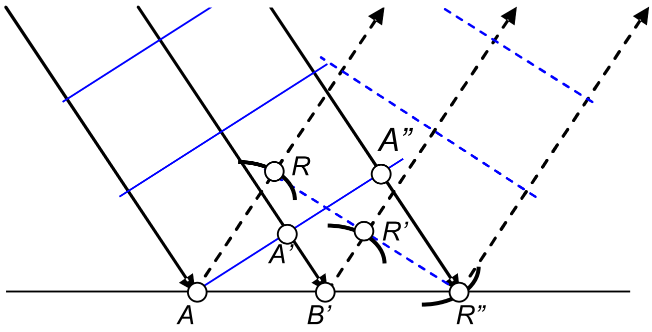


***Figura 52**. Il principio di Huygens applicato alla riflessione di un'onda piana. I fronti d'onda sono rapresentati in blu, mentre i raggi luminosi sono indicati in nero.*

Ma gli angoli di incidenza *i* e di riflessione *r* sono definiti come

$$\hat{i} = 90° - A''\hat{R}''A$$

$$\hat{r} = 90° - R\hat{A}R''$$

e quindi l'angolo di riflessione *r* è uguale all'angolo di incidenza *i*, come corrisponde alla seconda legge della riflessione.

La figura 53 rappresenta invece quattro distinti stadi della rifrazione di tre fronti d'onda piani che incidono sulla superficie di separazione tra aria (mezzo 1) e vetro (mezzo 2) con un angolo di incidenza *i*. I tre fronti d'onda rappresentati nella figura 53.*a* sono stati scelti in modo che la loro distanza corrisponda alla lunghezza d'onda λ_1 nel mezzo 1.

La velocità v_2 di propagazione dell'onda nel vetro è diversa della velocità v_1 con cui l'onda si propaga nell'aria. Tracciamo quindi le onde secondarie di Huygens (figura 53.*b*) considerando un tempo di propagazione Δt pari al tempo λ_1/v_1 necessario perché si abbia uno spostamento *A'B'* pari a una lunghezza d'onda nell'aria: il raggio *AR* dell'onda secondaria nel vetro sarà diverso che nell'aria, come lo è la velocità di propagazione v_2. Il suo valore λ_2 è dato dall'intervallo di tempo considerato $\Delta t = \lambda_1/v_1$ per la velocità di propagazione v_2:

$$AR = \lambda_2 = v_2 \Delta t = v_2 \frac{\lambda_1}{v_1} \qquad (20)$$

Il nuovo fronte d'onda è dato dalla tangente alle onde sferiche e corrisponde quindi alla linea spezzata *RB'B"* nella figura 53.*b*. La direzione di propagazione dell'onda nel vetro è data allora dal segmento *AR*, e l'angolo $A\hat{B}'R$ è uguale all'angolo di rifrazione *r* (mentre l'angolo $B'\hat{A}A'$ è uguale all'angolo di incidenza *i*). Per i due triangoli rettangoli *B'AA'* e *AB'R* si possono scrivere le relazioni:

$$\operatorname{sen} B'\hat{A}A' = \operatorname{sen}\hat{i} = \frac{\lambda_1}{AB'} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen} A\hat{B}'R = \operatorname{sen}\hat{r} = \frac{AR}{AB'} = \frac{\lambda_2}{AB'}$$

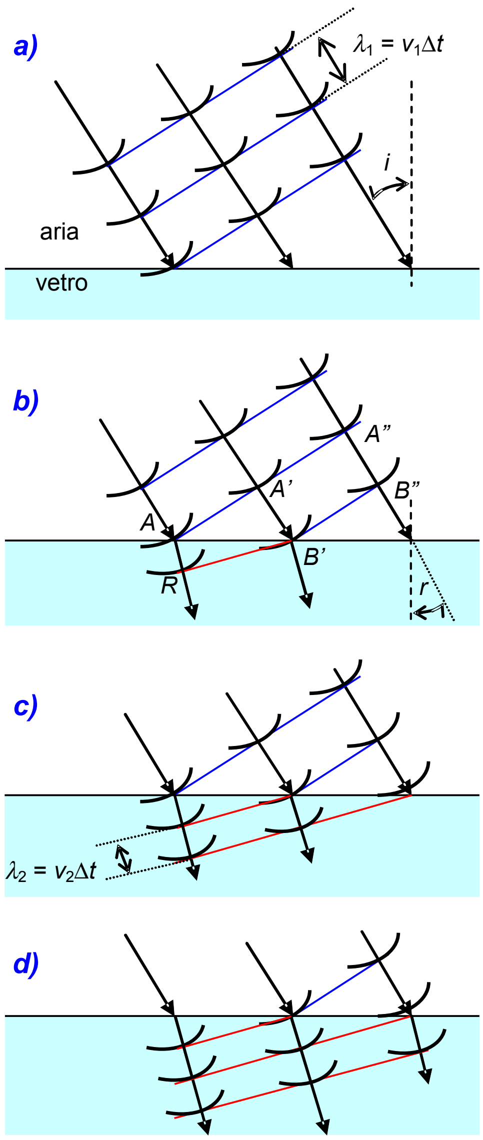


***Figura 53**. Il principio di Huygens applicato alla rifrazione di un'onda piana. Sono rapresentati in blu i fronti d'onda nell'aria, in rosso i fronti d'onda nel vetro e in nero i raggi luminosi.*

Dividendo membro a membro queste due relazioni e sostituendo per λ_2 il valore dato dalla relazione (20) si ottiene allora:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{v_1}{v_2} \tag{21}$$

Questa espressione esprime la seconda legge della riflessione nella forma data dall'espressione (18), secondo la quale il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza e il seno dell'angolo di rifrazione è costante ed è uguale all'indice di rifrazione relativo tra i due mezzi, che è per definizione uguale al rapporto tra le velocità di propagazione della luce nei due mezzi:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}_2} = n_{21} \tag{18}$$

14. Il principio di Fermat

Le leggi della riflessione e della rifrazione possono essere espresse in una forma generale conosciuta come **principio di Fermat**, dal nome del matematico francese Pierre de Fermat (1691-1665). Il principio di Fermat afferma che **il cammino percorso dalla luce tra due punti è quello che, nelle condizioni date, richiede il tempo minore**. (A volte, quando la superficie ottica è curva, il tempo a cui ci riferisce può essere massimo anziché minimo, ma è comunque o l'uno o l'altro.)

Questo principio definisce un cammino *unico* per i raggi di luce. La figura 54.a si riferisce al caso della riflessione. Un raggio proveniente da B è riflesso in A e raggiunge C come se provenisse da B'. Come abbiamo già visto, dalle leggi della riflessione deriva che la distanza di B' dietro lo specchio è uguale a quella di B davanti allo specchio. Chiaramente, andando da B' a C, la linea retta B'AC è sempre più breve di ogni altro percorso del tipo B'XC perché la linea retta corrisponde alla minima distanza tra due punti, e perciò questo percorso è anche quello che richiede il tempo minore.

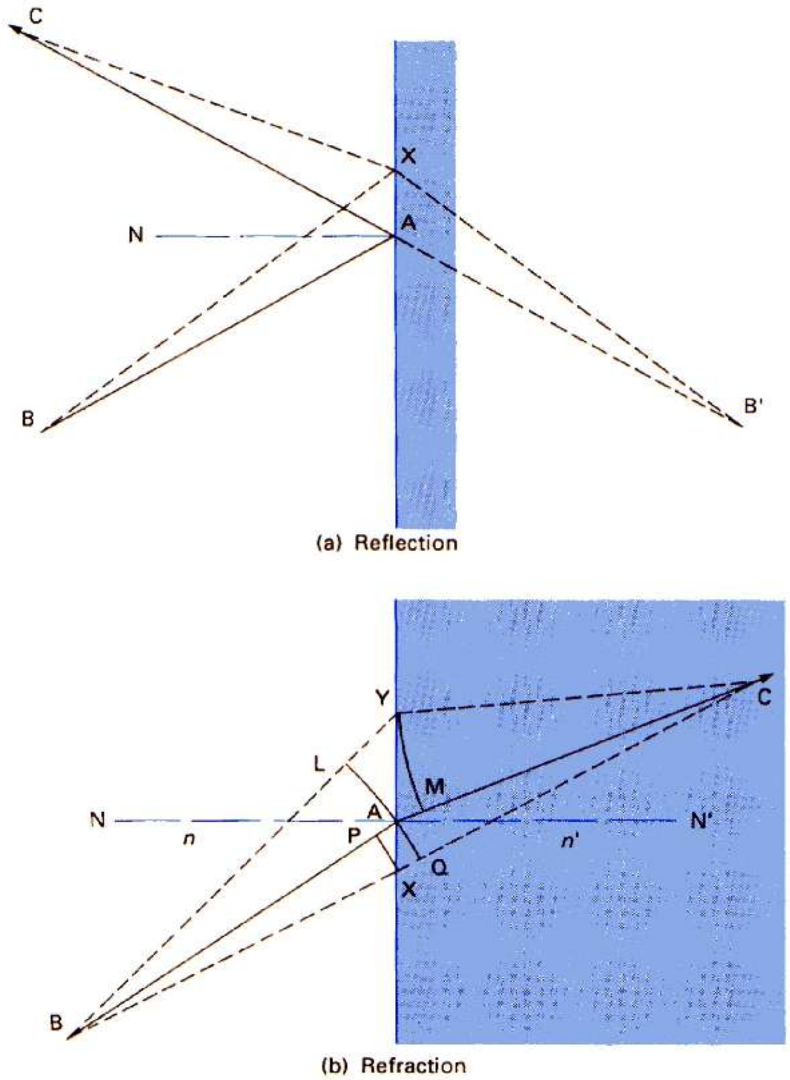


Figura 54. *Il principio di Fermat.*

Nel caso della rifrazione, il tempo più breve può non corrispondere con la distanza minore a causa delle differenti velocità nei due mezzi. La velocità della luce nei differenti materiali è collegata ai loro indici di rifrazione: per la definizione (13) dell'indice di rifrazione infatti in ogni mezzo la velocità *v* di propagazione della luce è pari alla velocità *c* di propagazione della luce nel vuoto divisa per l'indice di rifrazione assoluto *n* del mezzo:

$$v = \frac{c}{n}$$

Quindi, il tempo impiegato dalla luce per percorrere una distanza *l* nel vuoto è *l*/*c*, mentre il tempo impiegato per percorrere la stessa distanza in un mezzo con indice di rifrazione *n* è *nl*/*c*. Il termine *nl* è detto **cammino ottico** o **spessore ottico**.

Nella figura 54.b il percorso BAC è quello che corrisponde alla legge della rifrazione ed è anche quello a cui corrisponde, per il principio di Fermat, il minimo tempo di percorrenza:

- il percorso BXC è più breve di BAC, ma nel tratto XQ la luce viaggia più lentamente che nel tratto PA, e ciò fa sì che il tempo impiegato dalla luce per percorrere BXC sia maggiore di quello impiegato per percorrere BAC;

- nel percorso BYC, invece, il tratto BY è molto più lungo del tratto AM nel quale la luce viaggia più lentamente, e la maggiore velocità con cui esso viene percorso non è tale da compensare la differenza di percorso;

- in definitiva, il percorso BAC è quello che viene effettuato dalla luce nel tempo minore, e a cui quindi corrisponde il minimo cammino ottico.

15. Rifrazione attraverso lamine a facce parallele

Si definisce **lamina a facce piane e parallele** un mezzo trasparente a facce piane e parallele immerso in un altro mezzo. Esempi di lamine a facce piane e parallele sono i normali vetri delle finestre.

Se la luce incide **perpendicolarmente** su una superficie piana che separa due diversi mezzi, si propaga nel secondo mezzo senza deviazione. A una seconda superficie piana parallela alla prima si applica la stessa condizione e non si ha nessun cambiamento nella direzione del raggio di luce. Quindi, **la luce non è deviata quando passa perpendicolarmente attraverso una lamina a facce piane e parallele**.

Quando invece la luce incide su una lamina a facce piane e parallele con un angolo di incidenza diverso da zero, viene deviata entrando e uscendo dalla lamina. Un oggetto osservato attraverso una lamina a facce piane e parallele appare spostato con una traslazione dell'immagine detta **trascinamento** (*a* nella figura 55). Il trascinamento indica di quanto si sposta il raggio incidente sulla normale alla superficie, rimanendo parallelo a se stesso. Si chiama invece **spostamento laterale** (*t* nella figura 55) la distanza tra i due raggi incidente ed emergente, cioè il segmento perpendicolare tra i due raggi.

Nella figura 55 è mostrato un raggio di luce che passa attraverso una lamina. L'indice di rifrazione della lastra è n_2, quello del mezzo davanti è n_1 e quello dietro è n_3. L'angolo di incidenza sulla prima superficie è i_1 mentre i'_1 è l'angolo di rifrazione per la prima superficie. Gli angoli di incidenza e di rifrazione per la seconda superficie sono i_2 e i'_2. Usiamo la legge della rifrazione per ciascuna superficie:

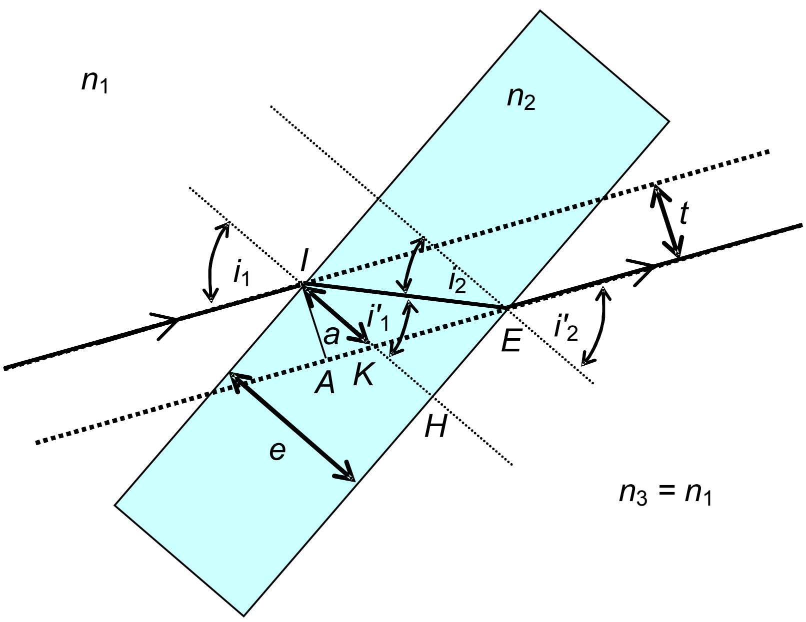


Figura 55. *Rifrazione attraverso una lamina a facce piane e parallele.*

n_1 sen i_1 = n_2 sen i'_1 (19)

n_2 sen i_2 = n_3 sen i'_2 (20)

Poiché le superfici della lamina sono parallele l'una all'altra abbiamo, all'interno della lamina,

$i'_1 = i_2$

Si ha perciò

n_2 sen i'_1 = n_2 sen i_2

e quindi dalle espressioni (19) e (20) abbiamo

n_1 sen i_1 = n_3 sen i'_2

Quando dalle due parti della lamina si ha lo stesso mezzo, come nel caso di una lamina di vetro in aria, $n_1 = n_3$, e quindi

$i_1 = i'_2$

Perciò **il raggio di luce emerge dalla lamina parallelo alla direzione originaria**. È stato, però, trascinato in avanti della quantità *a* pari alla lunghezza del segmento IK. Osserviamo che i triangoli HEI e HEK sono triangoli rettangoli con il lato HE in comune. Indicato con *e* lo **spessore** della lamina, dal triangolo HEI si ha

e tg i'_1 = HE (21)

e dal triangolo HEK si ha

$(e - a)$ tg i_1 = HE (22)

Uguagliando i primi membri delle espressioni (21) e (22) si ha

$(e - a)$ tg i_1 = e tg i'_1

ossia

a tg i_1 = e (tg i_1 − tg i'_1)

da cui si ricava che il **trascinamento** *a* vale

$$a = e\left(1 - \frac{\text{tg}\, i'_1}{\text{tg}\, i_1}\right) \qquad (23)$$

Lo **spostamento laterale** *t* si trova considerando il triangolo AIK, nel quale l'angolo AKI è uguale a i_1. Si ha allora

$t = a$ sen i_1 (24)

Angoli piccoli e ottica di Gauss

Quando gli angoli gli incidenza dei raggi di luce sono molto piccoli, molte formule utilizzate in ottica possono essere semplificate utilizzando un metodo che è stato sviluppato dal matematico tedesco Johann Karl Friedrich Gauss (1777-1855) che per questo viene detto **ottica di Gauss**.

La tabella 10 mostra che:

- se un angolo è molto piccolo i valori del seno e della tangente dell'angolo sono circa uguali al valore dell'angolo espresso in radianti;
- se un angolo è molto piccolo il valore del coseno dell'angolo è circa uguale a 1.

Tabella 1

Angolo (gradi)	*Angolo* (rad)	Valore del seno	Valore della tangente	Valore del coseno
0,3°	0,005236	0,005236	0,005236	0,999986
1,0°	0,017453	0,017452	0,017455	0,999848
3,0°	0,052360	0,052336	0,052408	0,998630
10,0°	0,174533	0,173648	0,176327	0,984807
30,0°	0,523599	0,500000	0,577350	0,866025

È quindi possibile, se tutti gli angoli sono molto piccoli, per esempio minori di 5°, calcolare la direzione dei raggi luminosi usando le **espressioni approssimate**

$$\text{sen}\ \alpha = \alpha\ ; \qquad \text{tg}\ \alpha = \alpha \qquad \text{e} \qquad \cos\alpha = 1 \tag{25}$$

Vediamo allora come le approssimazioni dell'**ottica di Gauss** si applicano al caso dei raggi che attraversano una lamina a facce piane e parallele.

Se gli angoli sono piccoli la formula (23) che fornisce il trascinamento *a* si può semplificare tenendo conto che in questo caso si ha tg $i_1 = i_1$ e tg $i'_1 = i'_1$; si ha allora

$$a = e\left(1 - \frac{i'_1}{i_1}\right) \tag{26}$$

Poiché poi per angoli piccoli si ha sen $i_1 = i_1$ e sen $i'_1 = i'_1$, **nell'ottica di Gauss** la legge della rifrazione (19) si può approssimare con $ni_1 = n_2 i'_1$, da cui si ha

$$\frac{i'_1}{i_1} = \frac{n_1}{n_2}$$

e quindi

$$a = e\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) = e\frac{n_2 - n_1}{n_2} \qquad (27)$$

Quindi se l'angolo di incidenza è piccolo il trascinamento *a* non dipende dal valore dell'angolo di incidenza ma solo dagli indici di rifrazione.

Un'applicazione della formula (27) si ha quando si considera la posizione di un oggetto osservato attraverso uno spessore di materiale con alto indice di rifrazione, per esempio un oggetto posto sul fondo di una piscina piena d'acqua, che sembra più vicino di quanto è realmente. Un oggetto posto nel punto I (figura 55), se osservato da un osservatore posto a destra della lamina, appare in K, spostato lungo la normale di una quantità pari al trascinamento *a*. Lo spessore apparente della lamina risulta pari a

$$e' = e - a$$

Se l'angolo di incidenza i_1 è piccolo (ossia se l'osservatore si trova vicino alla normale alla superficie della lamina) si può utilizzare la formula (27) e lo spessore apparente della lamina (nel nostro esempio la profondità apparente della piscina) risulta dato da

$$e' = e - a = e - e\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right) = e - e + e\frac{n_1}{n_2} = e\frac{n_1}{n_2} \qquad (28)$$

La formula (24) che dà lo spostamento laterale *t* si approssima poi, se gli angoli sono piccoli, con

$$t = a\, i_1 \qquad (29)$$

16. La rifrazione nei prismi

Consideriamo ora la rifrazione attraverso un **prisma**, che è una lamina di materiale ottico nella quale le due superfici **non** sono parallele. I prismi a rifrazione cambiano sempre la direzione della luce anche quando l'indice di rifrazione dei mezzi che si trovano ai due lati del prisma è lo stesso. Questo cambiamento di direzione o **deviazione** della luce è generalmente lo scopo per il quale i prismi vengono utilizzati.

L'angolo tra le superfici del prisma può essere molto piccolo o molto grande, come è mostrato nella figura 56:

- prismi poco angolati come quello a sinistra nella figura 56 deviano la luce di un angolo piccolo e sono usati principalmente in optometria;
- prismi molto angolati come quello a destra nella figura 56 intrappolano la luce per riflessione totale e sono detti **prismi a riflessione**;
- ci occuperemo per ora di prismi con angolo di apertura intermedia come quello al centro nella figura 56.

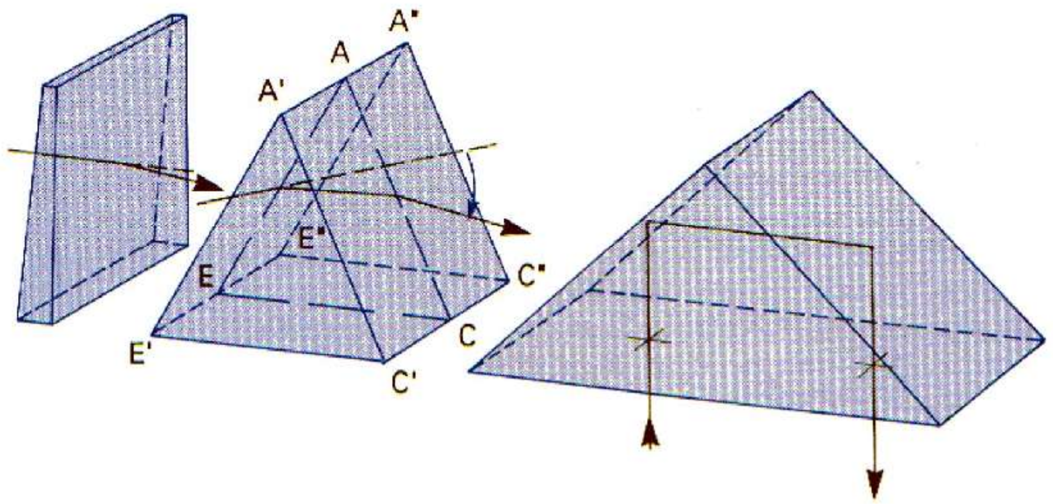


***Figura 56**. Prismi*

Il prisma di apertura intermedia al centro nella figura 56 ha le superfici rifrangenti A'C'C"A" e A'E'E"A". La linea di intersezione, A'A", di queste due superfici è lo **spigolo rifrangente** del prisma. Ogni sezione del prisma perpendicolare a questo spigolo, come ACE, è una **sezione principale** e l'angolo CAE di questa sezione è chiamato l'**angolo rifrangente** α.

È chiaro dalla figura 56 che **quando il prisma ha indice di rifrazione maggiore di quello del mezzo circostante, come nel caso di un prisma di vetro in aria, la luce è sempre deviata verso la base** CE.

Lo scopo principale dei prismi a rifrazione di questo tipo è la **dispersione** della luce che passa attraverso di essi, ossia la separazione della luce bianca nei colori spettrali che la compongono, sfruttando il fatto che l'indice di rifrazione del vetro è leggermente diverso per le diverse lunghezze d'onda della luce.

L'indice di rifrazione di una sostanza dipende leggermente dal colore della luce. La tabella 11 riporta l'indice di rifrazione assoluto dell'acqua e di alcuni tipi di vetro per tre ben determinate luci monocromatiche, scelte dagli ottici per caratterizzare il comportamento delle varie sostanze, e corrispondenti rispettivamente a due diversi tipi di lampade contenenti idrogeno e alla lampada contenente vapori di sodio.

Tabella 11. Indici di rifrazione assoluti per luci di diversi colori

Sostanza	Indice di rifrazione		
	Luce rossa (H_α) dell'idrogeno	Luce gialla del sodio	Luce blu (H_β) dell'idrogeno
Acqua (20 °C)	1,3318	1,3333	1,3378
Vetro crown	1,5145	1,5166	1,5229
Vetro flint	1,7066	1,7130	1,7313

Si hanno quindi variazioni dell'ordine dell'1 per cento nell'indice di rifrazione di una stessa sostanza per luci dei diversi colori, con un incremento dell'indice di rifrazione passando dalla luce rossa alla luce blu: la luce blu viene deviata maggiormente della luce rossa.

Se dunque un raggio di luce bianca, che risulta dalla composizione di tutti i colori spettrali, incide su un prisma a sezione triangolare come mostra la figura 57, nelle due rifrazioni subite dai raggi luminosi nell'attraversare il prisma i diversi colori vengono deviati in misura differente, ed emergono dalla faccia opposta del prisma separati uno dall'altro, con diversi angoli di deviazione. Uno schermo posto a una certa distanza dal prisma può così raccogliere lo **spettro** della luce incidente sul prisma. Uno strumento realizzato in questo modo per l'analisi della luce emessa da una sorgente luminosa si dice **spettrometro a prisma**.

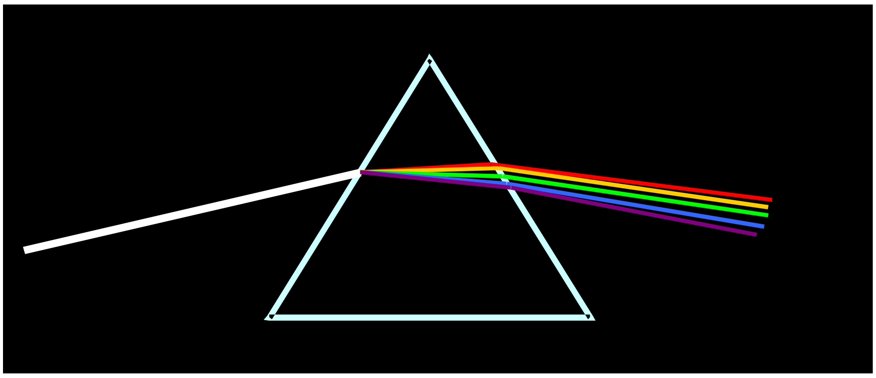


Figura 57. *Nelle due rifrazioni attraverso le superfici del prisma triangolare i raggi luminosi corrispondenti ai diversi colori spettrali, per i quali il vetro ha un differente indice di rifrazione, vengono deviati di angoli diversi.*

17. Il percorso della luce in un prisma a rifrazione

Vogliamo ora calcolare qual è il percorso di un raggio di luce all'interno di un prisma a rifrazione.

Nella figura 58 un raggio BD incide nel piano della sezione principale ACE ed entrando nel prisma viene deviato nella direzione DE. Quando raggiunge la seconda faccia del prisma nel punto E il raggio di luce viene deviato nuovamente ed emerge dal prisma nella direzione EG, restando sempre nello stesso piano dopo la prima e la seconda rifrazione.

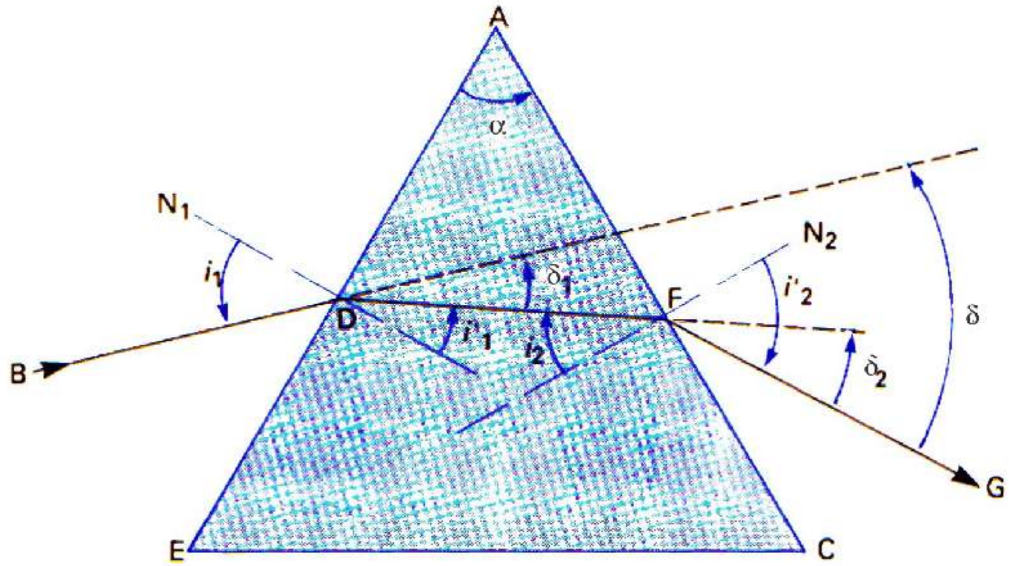


Figura 58. *Rifrazione della luce attraverso un prisma.*

Il percorso del raggio di luce può essere calcolato usando la legge della rifrazione. Per interpretare correttamente la figura 58 conviene ricordare le convenzioni utilizzate per la misura degli angoli:

- gli angoli di incidenza, riflessione e rifrazione vengono definiti partendo dalla retta perpendicolare alla superficie nel punto di incidenza;
- l'angolo di deviazione è l'angolo che va dal raggio emergente dal prisma al raggio incidente;
- ad ogni angolo viene attribuito un segno positivo se per descriverlo occorre compiere una rotazione antioraria e negativo se per descriverlo occorre compiere una rotazione oraria.

Nella figura 58, quindi, gli angoli i_2 e i'_2 relativi alla seconda superficie sono negativi, mentre tutti gli altri angoli (α, i_1, i'_1, δ, δ_1 e δ_2) sono positivi.

Considereremo solo prismi con indice di rifrazione n circondati da aria. L’equazione della rifrazione diviene allora, per il raggio incidente sulla

prima superficie,

$\text{sen } i_1 = n \text{ sen } i'_1$ (30)

mentre sulla seconda superficie si ha

$n \text{ sen } i_2 = \text{sen } i'_2$ (31)

Per collegare tra loro queste due equazioni consideriamo che la somma degli angoli interni del triangolo ADF è uguale a 180°. Abbiamo cioè (tenendo conto dei segni degli angoli)

$(90° - i'_1) + (90° + i_2) + \alpha = 180°$

da cui si ricava

$\alpha = i'_1 - i_2$ (32)

La luce è deviata di un angolo δ_1 sulla prima superficie e di un angolo δ_2 sulla seconda superficie. Dalla figura 58, sempre tenendo conto del segno degli angoli, si ha

$\delta_1 = i_1 - i'_1$ e $\delta_2 = i_2 - i'_2$

La deviazione totale, δ, è data da

$\delta = \delta_1 + \delta_2 = i_1 - i'_1 + i_2 - i'_2 =$

$= i_1 - i'_2 - \alpha$ (avendo usato l'equazione 32) (33)

L'ammontare della deviazione δ dipende dall'indice di rifrazione del prisma, dal suo angolo rifrangente α e dall'angolo di incidenza iniziale i_1. Il calcolo dell'andamento dei raggi all'interno del prisma è piuttosto laborioso e può essere effettuato utilizzando in successione le formule (30), (32), (31) e (33):

$i'_1 = \text{arcsen}\left(\frac{\text{sen } i_1}{n}\right)$ dalla formula (30)

$i_2 = i'_1 - \alpha$ dalla formula (32)

$i'_2 = \text{arcsen}\left(n \text{ sen } i_2\right)$ dalla formula (31)

$\delta = i_1 - i'_2 - \alpha$ dalla formula (33)

Prismi ad incidenza normale

Un caso particolare in cui il calcolo dell'andamento dei raggi luminosi all'interno di un prisma risulta particolarmente semplificato è quello del prisma in condizioni di **incidenza normale**, ossia quando il raggio incidente sulla prima superficie è perpendicolare alla superficie stessa e quindi $i_1 = 0$. Il raggio entra nel prisma senza essere deviato, come risulta anche dalla formula (30) per la quale si ha $i'_1 = 0$. Per le formule successive si ha allora

$i_2 = -\alpha$ dalla formula (32)

$i'_2 = -\arcsin(n \operatorname{sen} \alpha)$ dalla formula (31) e ricordando che sen(-α) = -sen α

$\delta_\perp = -i'_2 - \alpha$ dalla formula (33)

Con $\delta_\perp$ si è indicato l'angolo di deviazione per incidenza normale.

Le ultime due formule possono essere utilizzate per ricavare la relazione

$$\operatorname{sen}(\alpha + \delta_\perp) = n \operatorname{sen} \alpha \qquad \text{(per incidenza normale)} \qquad (34)$$

La formula (34) può essere utilizzata:

- per ricavare l'indice di rifrazione del materiale di cui è composto il prisma, se sono stati misurati i valori di α e di $\delta_\perp$; si ha infatti

$$n = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \delta_\perp)}{\operatorname{sen} \alpha} \qquad (35)$$

- oppure per ricavare l'angolo rifrangente α del prisma, se è noto il valore di n ed è stato misurato il valore di $\delta_\perp$; dalla formula (35) si ha infatti

$$n = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \delta_\perp)}{\operatorname{sen} \alpha} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \delta_\perp + \cos \alpha \operatorname{sen} \delta_\perp}{\operatorname{sen} \alpha} = \cos \delta_\perp + \frac{\operatorname{sen} \delta_\perp}{\operatorname{tg} \alpha}$$

da cui si ricava

$$n - \cos \delta_\perp = \frac{\operatorname{sen} \delta_\perp}{\operatorname{tg} \alpha}$$

e quindi

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \delta_\perp}{n - \cos \delta_\perp} \qquad (36)$$

Prismi in condizione di deviazione minima

Consideriamo ora come varia l'angolo di deviazione δ al variare dell'angolo di incidenza i_1, fissati i valori dell'indice di rifrazione n e dell'angolo rifrangente α del prisma. La figura 59.a mostra i percorsi di raggi di luce incidenti con differenti angoli su un prisma con angolo rifrangente di 60° e indice di rifrazione 1,5. Gli angoli di incidenza vanno da 15° a 90° con incrementi di 15°. Si vede che il raggio A entra nel prisma ma non può uscire dalla seconda superficie perché subisce riflessione totale. Il raggio B che incide a 30° emerge come raggio B′ con l'angolo indicato nella figura. Gli altri raggi sono rifratti in modo simile fino al raggio F che, a 90°, ha l'angolo di incidenza più grande possibile. La deviazione di ciascun raggio è misurata tra le direzioni dei raggi emergenti F′, E', D′, ecc. e le direzioni originali indicate dalle lineette F_1, E_1, D_1, ecc.

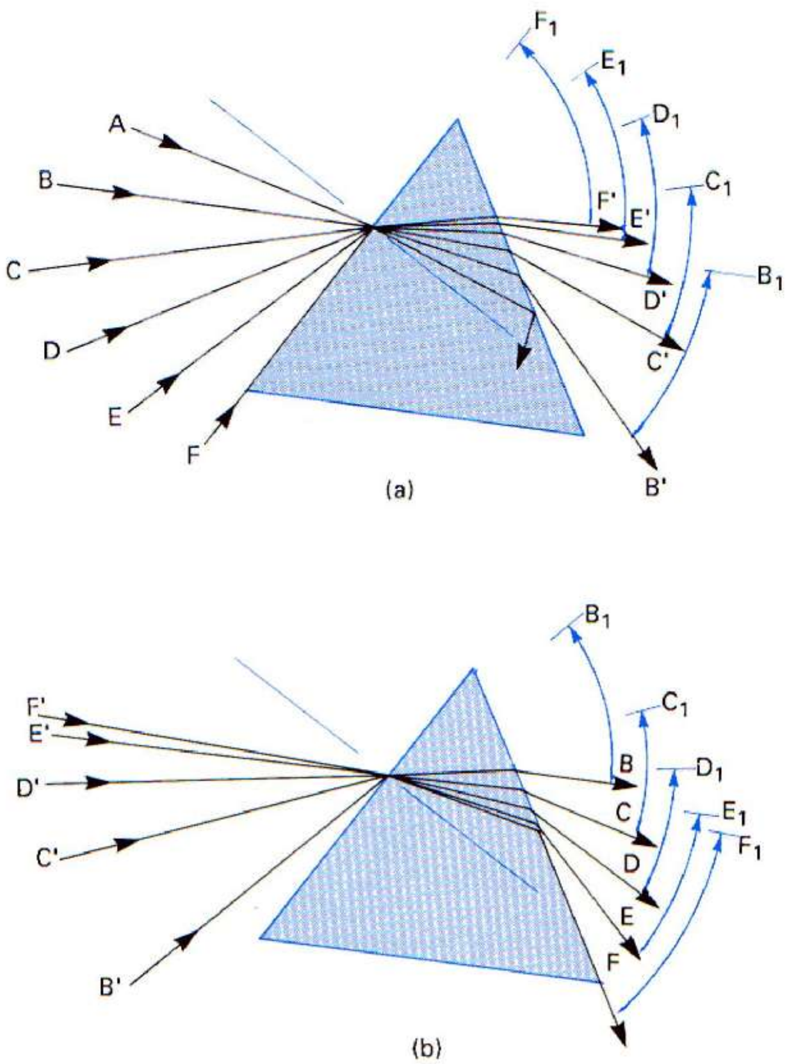


Figura 59. *Raggi deviati dal prisma.*

Le direzioni dei raggi disegnati in questa figura sono calcolate mediante le formule (30) e (31): gli angoli soddisfano la legge della rifrazione su ogni superficie e la legge è soddisfatta, per il principio di reversibilità, indipendentemente dal fatto che la luce si propaghi da B a B', ossia da sinistra verso destra, o da B' a B, da destra verso sinistra. La figura può quindi essere capovolta cambiando la direzione dei raggi, in modo da ottenere la figura 59.b nella quale i raggi B', C', D', ecc., incidono sul prisma agli stessi angoli con cui essi emergono nella figura 59.a. I nuovi angoli di emergenza risulteranno uniformemente spaziati agli intervalli di 15°, come lo sono gli angoli di incidenza nella prima figura.

Nella tabella 4 tutti i raggi sono elencati in ordine di angolo di incidenza crescente. Si vede che per l'angolo di incidenza minore (raggio F'-F) l'angolo di deviazione ha un valore grande (57,9°). Il valore dell'angolo di deviazione diminuisce all'aumentare dell'angolo di incidenza (dal raggio B-B' fino al raggio C-C') per poi tornare ad aumentare fino allo stesso (dal raggio C'-C al raggio F-F'). La deviazione maggiore si ha quindi quando il raggio emerge o incide con un angolo radente alla superficie.

Tabella 4. ***Deviazione dei raggi disegnati nella figura 59.***

Raggio	Angolo di incidenza	Angolo di emergenza	Angolo di deviazione	
F′-F	27,9°	90°	57,9°	
B-B′	30°	77,1°	47,1°	
E′-E	30,7°	75°	45,7°	
D′D	38,9°	60°	38,9°	
C-C′	45°	52,4°	37,4°	
				Deviazione minima
C′-C	52,4°	45°	37,4°	
D-D′	60°	38,9°	38,9°	
E-E'	75°	30,7°	45,7°	
B′-B	77,1°	30°	47,1°	
F-F′	90°	27,9°	57,9°	

L′**angolo di deviazione minima** si trova tra gli angoli di incidenza 45° e 52,4°. Con calcoli più accurati o con una misura sperimentale si può verificare che vi è un solo angolo di incidenza per il quale la deviazione è minima. Da ciò si deduce che **l′angolo di deviazione minima si ha quando gli angoli di incidenza e di emergenza sono uguali**. Se non fosse così, infatti, se cioè si avesse un valore minimo per l'angolo di deviazione quando gli angoli di incidenza e di uscita non fossero uguali, si dovrebbe avere la stessa situazione anche invertendo la direzione di propagazione della luce, e si dovrebbe quindi avere un secondo minimo per l'angolo di deviazione in corrispondenza di un secondo angolo di incidenza. Quindi, il valore minimo per l'angolo di deviazione si ha quando la luce passa in modo simmetrico attraverso il prisma. In corrispondenza dell'angolo di deviazione minima δ_m si ha perciò

$i_1 = -i'_2$ e $i'_1 = -i_2$

Perciò per l'equazione (32) si ha

$\alpha = i'_1 + i'_1 = 2\, i'_1$

e quindi

$$i'_1 = \frac{\alpha}{2} \qquad (37)$$

mentre per l'equazione (33) si ha

$\delta_m = i_1 + i_1 - \alpha = 2i_1 - \alpha$

e quindi

$$i_1 = \frac{\alpha + \delta_m}{2} \qquad (38)$$

dove α è l′angolo rifrangente del prisma e δ_m l′angolo di deviazione minima.

Sostituendo le espressioni di i_1 e i'_1 nella formula (30) si ottiene allora

$$\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\delta_m}{2}\right)}{n} \qquad (39)$$

o anche

$$n = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\delta_m}{2}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \qquad (40)$$

dove n è l'indice di rifrazione del materiale di cui è composto il prisma.

Se si usa l'equazione (39) per calcolare l'angolo di deviazione minima per un prisma di 60° con un indice di rifrazione 1,5, si trova per δ_m il valore 37,2°. L'equazione (38) dà allora per i_1 il valore 48,6°, che è compreso tra 45° e 52,4° come ricavato dalla tabella 4.

La misura dell'angolo di deviazione minima δ_m permette di determinare, mediante la formula (40), l'indice di rifrazione del materiale di cui è composto il prisma, se è noto l'angolo rifrangente α. Il valore di n che così si ottiene è molto accurato perché, anche se l'angolo di incidenza non corrisponde perfettamente alle condizione di simmetria, l'angolo di deviazione che ne risulta differisce comunque pochissimo dall'angolo di deviazione minima.

Prismi a rifrazione e riflessione totale

Nel calcolare l'andamento dei raggi luminosi all'interno dei prismi occorre tener presente che se l'angolo di incidenza i_2 sulla seconda superficie del prisma è grande, può essere maggiore dell'angolo limite per la riflessione totale, dato che l'indice di rifrazione n del prisma è maggiore di quello esterno (come avviene per esempio nel caso del raggio A della figura 59.a).

Se l'angolo di incidenza sulla prima superficie è minore dell'angolo critico la luce non emerge dalla seconda superficie ma viene riflessa totalmente all'interno del prisma. L'angolo di incidenza sulla prima superficie per cui l'angolo di incidenza sulla seconda superficie è uguale all'angolo limite è detto **angolo critico**.

L'angolo di incidenza sulla seconda superficie è uguale all'angolo limite i_{2c} per la riflessione totale quando (formula 19)

$$\operatorname{sen} i_{2c} = -\frac{1}{n} \qquad (41)$$

(ricordiamo che per come è stato definito l'angolo i_2 ha un valore negativo).

Per la formula (32) si ha

$$i'_1 = \alpha + i_2 \qquad (42)$$

e quindi per la formula (30) l'angolo critico i_{1c} è dato da

$$\text{sen } i_{1c} = n \text{ sen } i'_1 = n \text{ sen } (i_{2c} + \alpha) \qquad (43)$$

Utilizzando in successione le formule (41), (42) e (43) si ricava il valore dell'angolo critico i_{1c} dati i valori dell'indice di rifrazione n e dell'angolo rifrangente α. Si ottiene una soluzione solo se

$$\text{sen}(\alpha + i_{2c}) \leq \frac{1}{n} \qquad \text{ossia} \quad \alpha \leq -2i_{2c} \qquad (44)$$

In caso contrario, qualunque sia l'angolo di incidenza sulla prima superficie del prisma si ha riflessione totale sulla seconda superficie.

I prismi con angolo rifrangente di 60° sono i più comuni, e per un indice di rifrazione di 1,5 si ha un angolo critico di 27,9°. Per un angolo rifrangente di 70° e lo stesso indice di rifrazione si ha un angolo critico di 45,1°. Con un indice di rifrazione di 1,5 si ottiene un angolo critico solo per α < 83,6° (condizione 40): al di sopra di questo angolo rifrangente, per esempio per α = 90°, il prisma non può essere utilizzato per rifrangere la luce. Per prismi con indice di rifrazione maggiore l'angolo rifrangente limite è minore.

18. Prismi oftalmici

Le immagini osservate attraverso un prisma non appaiono nitide, perché sono sempre affette da aberrazioni. La figura 60.a mostra i raggi di luce provenienti da un oggetto vicino, B, che raggiungono il prisma con differenti angoli di incidenza. È chiaro che dopo due rifrazioni le deviazioni sono differenti e i raggi emergenti non appaiono provenire da un solo punto, a meno che l'occhio che guarda attraverso il prisma non intercetti un fascio di raggi sufficientemente stretto perché l'immagine possa apparire ragionevolmente nitida. Si osserverà l'immagine migliore quando i raggi utilizzati sono vicini alla deviazione minima, perché allora la deviazione cambia molto poco al variare dell'angolo di incidenza.

Le immagini osservate attraverso un prisma presentano tre difetti:

- tutti i prismi deviano la luce verso la loro base, e l'occhio vede quindi l'immagine apparentemente spostata verso il bordo rifrangente del prisma;

- a meno che la luce proveniente dall'oggetto non sia monocromatica, ossia di una sola lunghezza d'onda, l'immagine mostrerà la dispersione della luce prodotta dal prisma, con la luce blu più deviata e quella rossa meno deviata. Una linea bianca come quella mostrata nella figura 60.b apparirà quindi, se osservata attraverso un prisma, con una frangia blu sopra e una frangia rossa sotto;

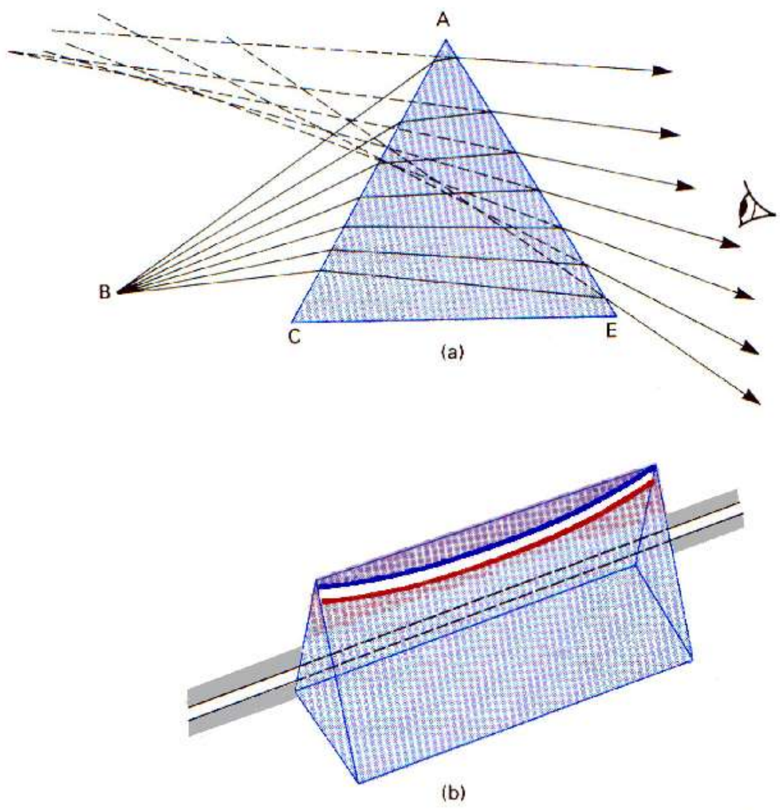


Figura 60*. Osservazione di oggetti attraverso un prisma.*

- quando l'occhio guarda un oggetto esteso come la linea bianca mostrata nella figura 60.b, solo un punto della linea è visto attraverso la sezione principale del prisma. Le altre parti della linea sono viste obliquamente e, poiché l'angolo di rifrazione in una sezione obliqua del prisma è maggiore dell'angolo di rifrazione nella sezione principale, la deviazione è diversa per le differenti parti della linea. Quindi la linea mostrata nella figura 60.b appare distorta, come è mostrato nella figura.

A volte si usano dei prismi per alleviare e correggere condizioni muscolari anormali negli occhi (strabismo). Le immagini che si ottengono in questi casi presentano questi tre difetti. Per questo motivo i prismi oftalmici hanno raramente angoli rifrangenti che superano 15°, altrimenti le immagini risultano notevolmente confuse. La figura 61 mostra un prisma di 10° con l'immagine spostata nella direzione della linea che congiunge la base con il bordo rifrangente. L'aspetto di questa immagine è mostrato nella figura 62.

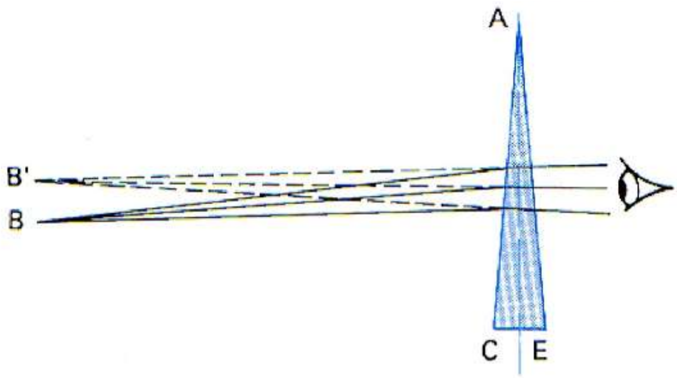


Figura 61. *Rifrazione attraverso un prisma oftalmico di 10°.*

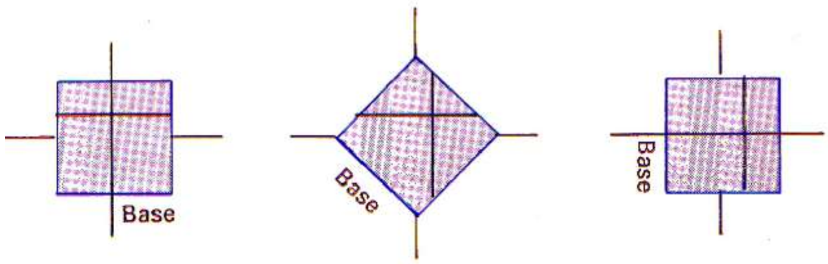


Figura 62. *Aspetto di un oggetto a forma di croce visto attraverso un prisma oftalmico.*

Lo spostamento dell'immagine può essere misurato in gradi o con una unità di misura che dà lo spostamento laterale apparente di un oggetto alla distanza di 1 m. Questa unità è la **diottria prismatica** Δ, che è il potere di un prisma che devia la luce che passa attraverso di esso in modo che un oggetto a 1 m di distanza appaia spostato di 1 cm. Quindi un prisma con un potere 2,5 Δ sposta di 2,5 cm l'immagine di un oggetto a 1 m di distanza e un prisma con un potere P Δ la sposta di P cm. La deviazione angolare δ_p di un tale prisma è data dall'equazione

$$\mathrm{tg}\,\delta_p = \frac{P}{100} \qquad (45)$$

Le deviazioni angolari di tutti i prismi sono dati dalla formula (33):

$$\delta = i_1 - i'_2 - \alpha \qquad (33)$$

ma per **prismi di piccolo angolo** rifrangente usati in direzione quasi perpendicolare alla luce incidente le equazioni (30) e (31) sono approssimate da

$$i'_1 = \frac{i_1}{n} \qquad \text{e} \qquad i'_2 = ni_2$$

in modo che l'equazione (33) diviene:

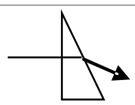
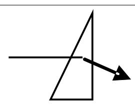
$$\delta = ni'_1 - ni_2 - \alpha$$

e usando l'equazione (32) si ha allora

$$\delta = n(i'_1 - ni_2) - \alpha = n(\alpha) - \alpha = (n - 1)\alpha \qquad (46)$$

Quando si fa un'approssimazione, è importante sapere che genere di errore si introduce. Nella tabella 5 la deviazione angolare è stata calcolata per due orientazioni del prisma (con la prima superficie o la seconda superficie perpendicolari alla luce proveniente dall'oggetto) sia mediante le formule esatte, sia mediante la formula approssimata (equazione 46). Si è utilizzato l'indice di rifrazione 1,523 del vetro crown da occhiali. Si vede che il valore approssimato è generalmente minore del valore esatto e che il caso in cui la seconda superficie è perpendicolare alla luce che raggiunge il prisma (corrispondente all'incirca alla condizione di deviazione minima) è quello meglio rappresentato dal calcolo approssimato.

Tabella 5

Angolo rifrangente (gradi)	Deviazione		
			Approssimata (usando l'equazione 46)
10	5,3°	5,26°	5,23°
20	11,4°	10,8°	10,6°
30	19,6°	16,6°	17,7°

19. Prismi a riflessione

Nei paragrafi precedente sono stati descritti prismi che deviano la luce per rifrazione. Essi hanno lo svantaggio di produrre immagini confuse e colorate a meno che l'ammontare della deviazione non sia molto piccolo.

I prismi possono essere usati anche per riflettere la luce per riflessione totale e in questi casi si ottengono immagini migliori perché la legge della riflessione è lineare e non c'è dispersione.

I quattro prismi mostrati nella figura 63 deviano la luce rispettivamente di 90°, 60°, 180° e 45°. Le superfici indicate con T devono riflettere per riflessione totale perché sono usate anche come superfici trasmittenti; quelle segnate con S devono essere rivestite di argento o alluminio. In tutti questi prismi l'angolo tra le superfici riflettenti è fisso e quindi anche la deviazione è fissa (come abbiamo visto nel paragrafo 8 quando abbiamo trattato la riflessione su coppie di specchi). Il prisma pentagonale (a_1) nella figura 63 è il pentaprisma usato nei mirini della macchine fotografiche reflex.

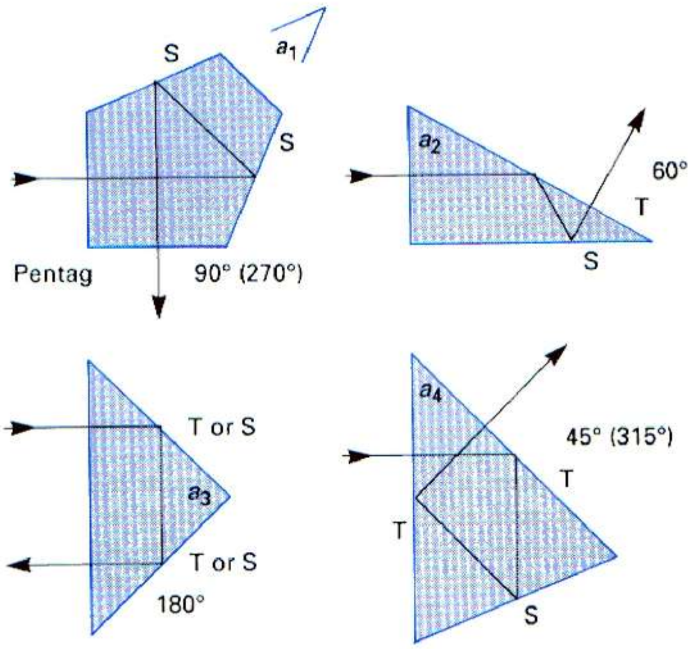


***Figura 63**. Prismi che deviano la luce per riflessione: a_1, 90°; a_2, 60°; a_3, 180°; a_4, 45°.*

A volte è necessario ruotare o invertire un'immagine piuttosto che deviare un fascio di luce. La rotazione dell'immagine è ottenuta attraverso una combinazione di prismi che non deviano il fascio di luce ma lo riflettono un numero dispari di volte, in modo che l'immagine sia vista capovolta rispetto all'oggetto. Un esempi di questo tipo di prismi è il **prisma di Amici** che usa una riflessione più due rifrazioni; il suo uso è generalmente limitato a fasci di luce paralleli e monocromatici.

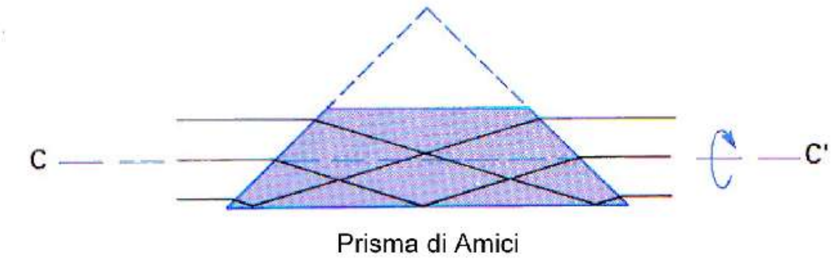


***Figura 64**. Prisma di Amici.*

Anche i sistemi di prismi che invertono immagini sono di molti tipi. Il loro requisito principale è un numero pari di riflessioni, ma almeno due di esse devono avvenire ad angolo retto con le altre. Il più comune è il **prisma di Porro** mostrato nella figura 65.a. Usa due prismi da 90° per riportare la luce nella sua direzione originaria, ma con i raggi invertiti orizzontalmente e verticalmente. Il fascio emergente è spostato e la disposizione alternativa mostrata nella figura dà uno spostamento minore. I prismi di Porro sono usati comunemente nei binocoli per raddrizzare l'immagine, e lo spostamento dell'immagine può essere sfruttato per poter utilizzare obiettivi di grande diametro.

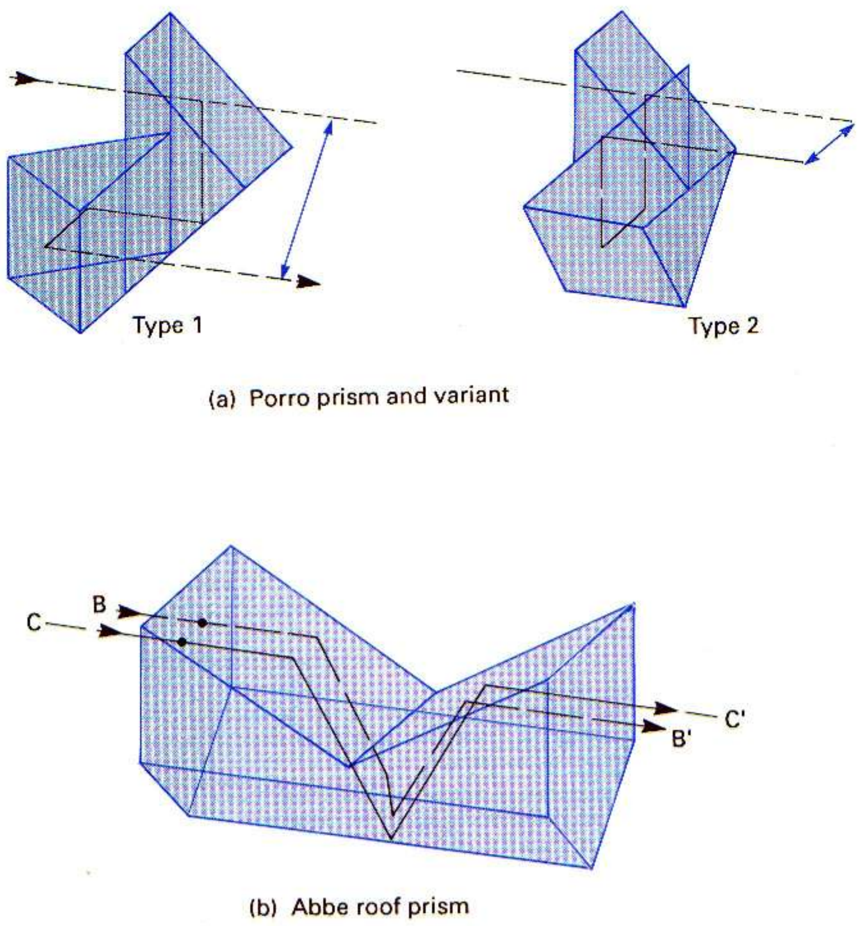


***Figura 65**. Prismi che invertono l'immagine.*

Quando è necessario capovolgere l'immagine senza introdurre spostamenti nel fascio di luce può essere usato un prisma invertitore con una delle superfici riflettenti trasformata in un **tetto**. Si tratta di un prisma a riflessione con un angolo rifrangente di 90° e il bordo rifrangente nello stesso piano dell'asse del fascio di luce. E' di questo tipo il **prisma di Abbe a tetto** mostrato nella figura 65.b. Il principio di funzionamento del prisma a tetto consiste nel far coincidere le immagini $B'_{1.2}$ e $B'_{2.1}$ della figura 36: ciò si può ottenere solo quando l'angolo rifrangente α è uguale a 90° in modo sufficientemente preciso e per questo il prisma a tetto deve essere costruito in modo molto accurato e viene utilizzato solo nei binocoli di maggior pregio e più costosi.